数理解析研究所講究録
152巻 1972年 53-64



# Link の concordant classification について

大阪市大　渋谷哲夫

## 序

$R^3$ or $S^3$ の knot の concordant (cobordic) classification は [1] で, link に関しては [2] でやられている。ここでは [1] と同じようなやり方で link に concordant classi-fication を導入しようとすると link の product がうまく定義できず, あまりうまくいかないという話である。

4-dimensional Euclidean space $R^4$ に embed された oriented surface $F$ を考える。$F$ の local knot type を次のようにきめる。$N(x, R^4)$, $N(x, F)$ をそれぞれ $R^4$, $F$ の点 $x$ における regular neighborhood とする。もし $x$ が $F$ の interior point ならば、boundary $\partial N(x, R^4)$ は 3-sphere で $\partial N(x, F)$ は 1-sphere である。そのとき $\partial N(x, F)$ を $k(x)$ と書き $x$ における $F$ の local knot という。$k(x)$ が trivial ならば $F$ は

$x$で locally flat といい，もし $k(x)$ が non-trivial のとき，$F$は$x$で locally knotted あるいは$x$は$F$の locally knotted point という。$F$が$R^4$の subspace に properly に embed されているとき$\partial F$の点に関しても local knot は考えられるが，$F$の slight modification により$x$は$F$の interior point と考えることによりそこでの local knot ということになり$\partial F$では locally flat と仮定してさしつかえない。$F$の各点で locally flat のとき$F$は locally flat といい，そうでないとき$F$は locally knotted という。

Fox, Milnor は [1] で knot に equivalence relation をいれた。すなわち，knot $k$と$k'$が concordant, $k\sim k'$とは$k\#(-k')$が slice knot で定義する。$k$が slice knot とは$R^4\supset R^3[0]=\{(x,y,z,t)\in R^4 \mid t=0\}\supset k$が$R^3[0,\infty)=\{(x,y,z,t)\in R^4 \mid t\geq 0\}$で locally flat な disk をはるときをいう。さらに$R^4$に embed された 2-sphere $S^2$の locally knotted points のすべてを$p_1,\cdots,p_n$としたとき，$S^2$上で$p_1,\cdots,p_n$を通る arc $\alpha$をとるとき，$(\partial N(\alpha,S^2),\partial N(\alpha,R^4))\approx(k(p_1)\#\cdots\#k(p_n),S^3)$が slice knot になる。また [1] の Theorem 3 により次のようにもいいかえられる。すなわち$k\sim k'$なるための必要十分条件は$R^3[0,1]=\{(x,y,z,t)\in R^4 \mid 0\leq t\leq 1\}$に locally flat な annulus が

存在して$R^3[0]$，$R^3[1]$での boundary が $k$ と $-k'$ になることである。これを link に拡張する．すなわち $l$ と $l'$ なる link が concordant，$l \sim l'$ とは（ここで $l$ と $l'$ の components の数が異なる場合も定義できるが，一応その数は同じとする.）$R^3[0,1]$ に $\mu(l)$ 個の disjoint locally flat な annuli が存在して $R^3[0]$，$R^3[1]$ での boundary が $l$ と $-l'$ になるときをいう。さらにこの定義を少し弱めて，$l$ と $l'$ の間に locally flat でなくともよいが disjoint な annuli がはれるとき $l$ と $l'$ は weak concordant と呼び $l \underset{w}{\sim} l'$ で表わす。そのとき次の2つの Lemma は明らかである。

<u>Lemma 1:</u> $\sim$，$\underset{w}{\sim}$ は equivalence relation になる。

<u>Lemma 2:</u> 任意の knot は weak concordant to $O$（$O$ は trivial knot）．特に slice knot ならば concordant to $O$.

<u>Theorem 1:</u> $l \underset{w}{\sim} l'$ とする。そのとき対応する各 component が knot concordant ならば $l \sim l'$.

proof: $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ を $R^3[0,1]$ の mutually disjoint な annuli で $(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[0] \approx l$，$(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[1] \approx (-l')$ なるものとする。各 $F_i$ がすでに locally flat ならばなにもする必要がないから少なくとも一つ，たとえば $F_1$ が locally flat でないとする。$F_1 \cap R^3[0] = k_1$，$F_1 \cap R^3[1] = (-k_1')$ とすると条件より $k_1 \sim k_1'$．$R^3[-1]$，$R^3[2]$ で点 $p, p'$ をそれぞれとり2つの cone $p * k_1$，$p' * (-k_1')$ を

作る。すると$F_1 \cup p * k_1 \cup p' * (-k'_1)$は1つの2-sphere $S^2$でlocally knotted points は$p, p', p_1, \cdots p_n$である。ここで$p_1, \cdots p_n$は$F_1$のlocally knotted pointsの全部とする。そこで$S^2$上で$p, p'$を通り$p_1, \cdots p_n$を通らないarc $\alpha$をとる。すると$\partial(N(\alpha, R^4) \cap S^2) \approx k_1 \# (-k'_1) \sim 0$。だから$F_1$上で$p_1, \cdots p_n$を通るarc $\beta$をとるとき$\partial(N(\beta, R^4) \cap S^2) \approx k(p_1) \# \cdots \# k(p_n) \sim 0$. だから$N(\beta, R^4)$の中で$k(p_1) \# \cdots \# k(p_n)$にlocally flatなdisk $D$をはり$\tilde{F}_1 = (F_1 - N(\beta; R^4) \cap F_1) \cup D$とおくと$\tilde{F}_1$はlocally flatで$\partial \tilde{F}_1 = \partial F_1$。以下同様に$F_2 \cup \cdots \cup F_n$をlocally flatにできる。故に$l \sim l'$. q.e.d.

$l$と$l'$がisotopicならば$l \underset{W}{\sim} l'$だから

<u>Corollary 1.1:</u> (D. Rolfsen [4]) $l$と$l'$がisotopicで対応するcomponentがconcordantならば$l \sim l'$.

Lemma 2. と Theorem 1より次のCorollaryは明らか.

<u>Corollary 1.2:</u> $l = k_1 \cup \cdots \cup k_n$をlinkでそのcomponentsが$k_1, \cdots k_n$とする。$l \underset{W}{\sim} O_1 \circ \cdots \circ O_n$ならば$l \sim k_1 \circ \cdots \circ k_n$. ここで$k \circ k'$はsplitしているという意味である。

2つのknot $k$と$k'$のproductはuniqueにきまるが、2つのlink $l$と$l'$のproductは$l$と$l'$のprojectionや、bandの結び方などによりuniqueにはきまらない。ここではn-fusionなるものを定義する。$l = k_1 \cup \cdots \cup k_n$,

$l' = k'_1 \cup \cdots \cup k'_n$ なるlinkとする。$l$と$l'$の異なるcomponentを1個ずつbandでむすぶ。$l$の$k_1, \cdots k_n$と結ばれる$l'$のcomponentを$k'_{i_1}, \cdots, k'_{i_n}$とするとき、できあがったlinkを$f_{i_1 \cdots i_n}(l \circ l')$と書き$l \circ l'$より$n$-fusionでえられるという。

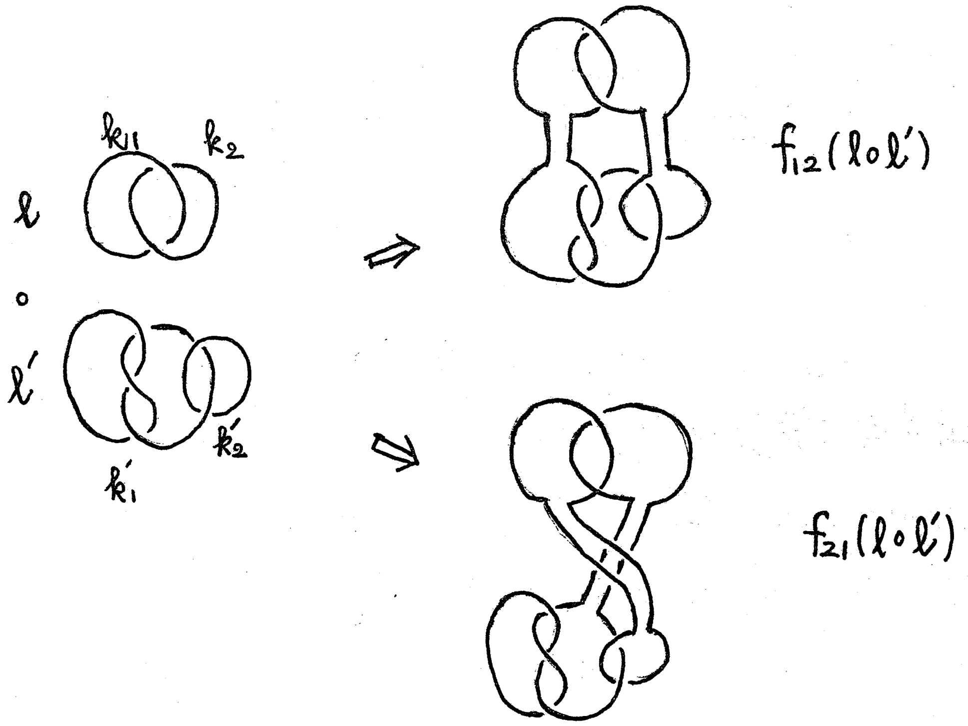



Fig 1

特に$k \circ k'$の1-fusionを$f(k \circ k')$と書く。さらに$n$-fusionは$n!$個の異なるcomponentのfusionがあるがそれらを区別しないとき$f^n(l \circ l')$と書く。

$n$-fusionはconcordanceの範囲でuniqueではない。たとえば、同じ$f_{12}(l \circ (-l))$でも$\sim 0$になったり$\not\sim 0$になったりする。(Fig 2).

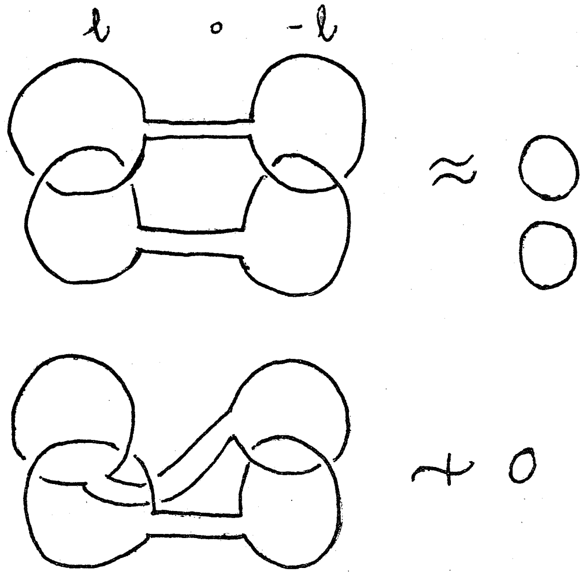



Fig 2

しかし $l \underset{W}{\sim} 0$ or $l' \underset{W}{\sim} 0$ であれば (weak) concordant の範囲である程度 unique にきまる。すなわち

<u>Lemma 3 :</u> $k$ と $k'$ の any 1-fusion は product に concordant i.e. $f(k\circ k') \sim k\# k'$

proof : 2つの knot $f(k\circ k')$, $k\# k'$ をそれぞれ $R^3[0]$, $R^3[2]$ におき $R^3[0,2]$ でこれを boundary とする genus 1 の locally flat な surface で $R^3[1]$ との intersection が $k\circ k'$ になるような $F$ をつくる。さらに十分小さな正数 $\varepsilon$ に対して $F\cap R^3[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \approx F_1 \cup F_1'$ ここで $F_1 \approx k\times[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, $F_1' \approx k_1' \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ と仮定してさしつかえない。$F' = cl(F-F_1)$ とおく。$R^3[1]$ での異なる2点 $p, q$ をとり $F_1'$ と交わらないような2つの cone $c(p) = p*(F_1\cap R^3[1-\varepsilon])$, $c(q) = q*(F_1\cap R^3[1+\varepsilon])$

を作ることができる。そこで $\tilde{F}=F'\cup C(p)\cup C(q)$ は $f(k\circ k')$ と $k\# k'$ を boundary とする locally knotted points $p, q$ の annulus である。$p$ と $q$ を $\mathrm{Int}\,\tilde{F}$ での simple arc $\alpha$ でむすぶと $(\partial N(\alpha,\tilde{F}), \partial N(\alpha, R^3[0,2]))=(k\#(-k), \partial N(\alpha, R^3[0,2]))$.
だから $\partial N(\alpha,\tilde{F})$ は $\partial N(\alpha, R^3[0,2])$ で slice knot だから $N(\alpha, R^3[0,2])$ で locally flat な disk $D$ がはれる。このとき $F^*=(\tilde{F}-N(\alpha,\tilde{F}))\cup D$ とおけば $F^*$ は locally flat な annulus で $\partial F^*=f(k\circ k')\cup(-(k\# k'))$。故に $f(k\circ k')\sim k\# k'$ q.e.d.

このLemmaを使い次の2つのTheoremを証明する。

<u>Theorem 2:</u> $l=k_1\cup\cdots\cup k_n$, $l'=k'_1\cup\cdots\cup k'_n$ なる link とし, $l\underset{w}{\sim}0$ and $l'\underset{w}{\sim}0$ とする。すると $l$ と $l'$ の任意の $n$-fusion は weak concordant to zero i.e. $f^n(l\circ l')\underset{w}{\sim}0$ になる。
さらに各 $i$ に対し $k_i\sim(-k'_i)$ ならば $f_{12\cdots n}(l\circ l')\sim 0$

proof: 前半は明らか。後半も $f_{12\cdots n}(l\circ l')\underset{w}{\sim}0$ で Theorem 1 (Corollary 1.2) と Lemma 3 を使うと証明できる。

<u>Theorem 3:</u> $l\underset{w}{\sim}0$ と仮定すると次のことが成立する。

$$f_{i_1\cdots i_n}(l\circ l')\sim g_{i_1\cdots i_n}(l\circ l')$$

proof: $l_f=f_{i_1\cdots i_n}(l\circ l')$, $l_g=g_{i_1\cdots i_n}(l\circ l')$ と書き $l_f\subset R^3[0]$, $l_g\subset R^3[2]$ におく。$R^3[0,2]$ で $n$ 個の locally flat な disjoint な surface $F_1\cup\cdots\cup F_n$ で各 $F_i$ は genus 1 で, $\partial F_i\cap R^3[0]\neq\phi$, $\partial F_i\cap R^3[2]\neq\phi$, $\partial(F_1\cup\cdots\cup F_n)=l_f\cup(-l_g)$

$(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[1] = l \circ l'$ なるものを作る。さらに十分小さな正数$\varepsilon$に対して $(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \approx (l \circ l') \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ としてよい。$l \underset{w}{\sim} 0$ だから $l \times R^3[1-\varepsilon]$, $l \times R^3[1+\varepsilon]$ は $R^3[1-\varepsilon, 1)$, $R^3(1, 1+\varepsilon]$ でそれぞれ $O_1 \circ \cdots \circ O_n$, $O'_1 \circ \cdots \circ O'_n$ と disjoint な annuli $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} F'_i$ と $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} F''_i$ がはれる。$O_1 \circ \cdots \circ O_n$, $O'_1 \circ \cdots \circ O'_n$ にそれぞれ disjoint disks $D_1 \cup \cdots \cup D_n$, $D'_1 \cup \cdots \cup D'_n$ をはる。そこで $\tilde{F}_i = (F_i - k_i \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]) \cup F'_i \cup F''_i \cup O_i \cup O'_i$, $\tilde{F} = \tilde{F}_1 \cup \cdots \cup \tilde{F}_n$ とおけば $\partial \tilde{F} = l_f \cup (-l_g)$。さらに Lemma 3 より $l_f$ と $l_g$ の対応する knot は互いに concordant で Theorem 1 を使い $l_f \sim l_g$. q.e.d.

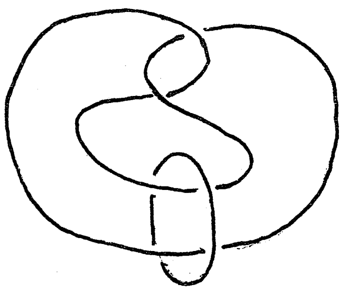
[2] で link に1つの equivalence relation ($\underset{c}{\sim}$ と書く) を導入したが、ここで $\sim$ は $\underset{c}{\sim}$ よりも強い relation であることを証す。すなわち、

<u>Theorem 4:</u> $l$ が $l'$ に concordant ならば $l$ は $l'$ に cobordic になる。すなわち $l \sim l'$ ならば $l \underset{c}{\sim} l'$。

proof: $l \sim l'$ より locally flat disjoint な annuli $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ が $R^3[0,1]$ にあり $(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[0] = l$, $(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[1] = -l'$ となっている。そこで isotopy で $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ をうごかして次のような状態におく。すなわち minimal points は $R^3[\frac{1}{8}]$ にあり $R^3[\frac{1}{4}]$ で $l$ と trivial link との fusion の bands が同時に

おこる。$R^3[\frac{3}{4}]$ で fission が同時におこり $l'$ と trivial link にわかれ、maximum points が $R^3[\frac{7}{8}]$ にある。このように変形した annuli を改めて $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ と書くことにすると $\underset{c}{\sim}$ の definition より $l \underset{c}{\sim} l'' = (F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[\frac{1}{2}]$, $l'' \underset{c}{\sim} l'$。
故に $l \underset{c}{\sim} l'$ q.e.d.

しかし逆は成立しない。たとえば



$\underset{c}{\sim} 0$ but $\not\sim 0$

Fig 3

$R^3[0]$ の link $l$ が $R^3[0,1)$ で locally flat な genus 0 の surface をはるとき $l$ を weak slice link と呼ぶ。$\sim 0$ は $\underset{w}{\sim} 0$, $\underset{c}{\sim} 0$, weak slice link になるが、$\underset{w}{\sim} 0$, $\underset{c}{\sim} 0$, weak slice link の間には強弱関係はないが次の Theorem が成立する。

Theorem 5: $l$ が weak concordant to zero のとき $l$ が cobordic to zero と weak slice link とが同値になる。

proof: $l \underset{w}{\sim} 0$ とすると Corollary 1.2 より $R^3[0,1]$ に disjoint locally flat proper annuli $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ で $\partial(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[0]$

$= k_1 \cup \cdots \cup k_n$ で $\partial(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[1] = (-k_1) \circ \cdots \circ (-k_n)$ なるものが存在する。

$l \underset{c}{\sim} 0$ ならば $k_1 \# \cdots \# k_n \sim 0$ になる。だから $R^3[1,2]$ で $k_1 \# \cdots \# k_n$ を boundary にする locally flat な disk $D$ をはる。そのとき $F = (F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cup D \cup (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$ は locally flat で genus $0$ で $\partial F = l$ である，ここで $B_i$ は $k_i$ と $k_{i+1}$ を product する band とする。故に $l$ は weak slice link である。

逆に $l$ を weak slice link とする。$R^3[2]$ で $n$ 個の異なる点 $p_1, \cdots p_n$ をとり $R^3[1,2]$ で $k_1 \circ \cdots \circ k_n$ に disjoint に cones $p_1 * k_1, \cdots p_n * k_n$ を作る。$l$ は weak slice link だから $R^3(-1,0]$ で genus $0$ の locally flat な surface $F_0$ をはる。そのとき $S = F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_n \cup p_1 * k_1 \cup \cdots \cup p_n * k_n$ は 2-sphere で locally knotted points が $p_1, \cdots p_n$ である。そこで $p_1, \cdots p_n$ を通る simple arc $\alpha$ を $S$ 上でとると $(\partial N(\alpha, S), \partial N(\alpha, R^4)) \approx (k_1 \# \cdots \# k_n, \partial N(\alpha, R^4))$ で $k_1 \# \cdots \# k_n \sim 0$。故に $l \underset{c}{\sim} 0$ q.e.d.

最後に concordance, weak concordance と link の signature ([3]) についてのべる。link $l$ の signature, nullity を $\sigma(l)$, $n(l)$ で表わすと

<u>Lemma 5 :</u> $l$ と $l'$ が concordant ならば $\sigma(l) = \sigma(l')$

proof : $l$ と $l'$ がそれぞれ $R^3[0]$, $R^3[1]$ にあるものとし，

$R^3[0,1]$ に concordant を与える annuli $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ がある。さらに $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ は Theorem 4 の証明の時のような状態にあると仮定してよい。そのとき [3] の Lemma 6.2, Lemma 7.1 を使うと $\sigma(l)=\sigma(l'')$, $\sigma(l'')=\sigma(l')$ なることがわかる。 q.e.d.

Lemma 5 を使い weak concordant のとき次の事柄が成立する。

<u>Theorem 6 :</u> $l=k_1 \cup \cdots \cup k_n$, $l'=k'_1 \cup \cdots \cup k'_n$ なる link とし $l \underset{W}{\sim} l'$ ならば, $\sigma(l)-\sum_{i=1}^{n}\sigma(k_i)=\sigma(l')-\sum_{i=1}^{n}\sigma(k'_i)$

proof): $l \underset{W}{\sim} l'$ だから $R^3[0,1]$ に disjoint な annuli $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ で $\partial(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[0]=l$, $\partial(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cap R^3[1]=-l'$ なるものが存在する。$l$ の各 component $k_i$ に $l$ と split した knot $-k_i \# k'_i$ を product した link を $l''$ と書く。$(-k_1 \# k'_1)\circ \cdots \circ(-k_n \# k'_n)$ に $R^3[0,\varepsilon]$ で $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ と交わらないような cone をはる。ここで $\varepsilon$ は十分小さな正数とする。すると Theorem 1 より $l' \sim l''$。Lemma 5 と [3] の Lemma 7.3 より

$$
\begin{aligned}
\sigma(l') &= \sigma(l'') \\
&= \sigma(l)+\sum_{i=1}^{n}\sigma(-k_i \# k'_i) \\
&= \sigma(l)-\sum_{i=1}^{n}\sigma(k_i)+\sum_{i=1}^{n}\sigma(k'_i)
\end{aligned}
$$

q.e.d.

## References


1. R. H. Fox and J. W. Milnor : Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots, Osaka J. vol. 3 (1966)
2. F. Hosokawa : A concept of cobordism between links, Ann. of Math. vol. 86 (1967)
3. K. Murasugi : On a certain numerical invariant of link types, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 117 (1965)
4. D. Rolfsen : Isotopy of links in codimension two, to appear