数理解析研究所講究録
155巻 1972年 98-107

立体パズルと電子計算機

京都大学数理解析研究所　一松信
京都府立医大，数学教室　桑垣煥

0. はじめに

電子計算機による長時間探索を要する一つの例として，遊戯的な話題ではあるが，立体パズルの全数探索がある．Bouwkamp が，立体ペントミノー（平面型ペントキューブ）12種により，3×4×5 の直方体をつめるしかたが，3940 通りであることをたしかめたのは，つい最近であり，数百時間の計算を要したらしい（[1] 参照）．

3次元空間できれいな充填形は，立方体以外にあまりなく，多面体にすると，かえっておき方を制約するので，むしろ球を並べた形で充填形を作ってみるほうが可能性が高い．

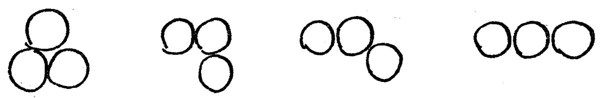
この報告は，桑垣によるポリボールの案と，一松が小型版のトリボールを計算機でためした報告である．ひきつづきテトラボールを計算機でためすことを計画中であるが，諸般の事情によってその作業が中断しているので，不完全な中間

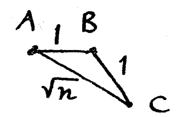
報告であるが，いままでの結果を記すことにする．

1. ポリボールの案

1971年秋頃から桑垣は，球による立体パズルの可能性を考えていたが，1972年正月に，西ドイツ製のKugeliという組立ておもちゃを利用して，4個の球を平面的に連結した片11種を作り，それらを組み合わせて，1辺が4の正八面体状に積み上げることに成功した．

このような合同な球を何個か連結してできる図形を，ポリボール（polyball）とよぶことにしよう（研究集会の席で提案して，出席の方々の賛同をえた）．2個の組合せは1種であるが，それ以上のものについては，平面状に並び，しかも隣りあう同志の角度を90°か，または60°，120°とする．したがって3個の組合せは，下記の4種となる．





これはちょうど $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=1$ とするとき，$\overline{AC}=\sqrt{n}$ $(n=1,2,3,4)$ とした形に相当する．4個以上でも同様に平面上のポリオミノ一型か，ポリヘックス型の配列のもののみを採用する．したがってその種類は，(n-オミノーの数)＋(n-ヘックスの数)－1 となる．－1は，直線上のもの

が両者に共通だからである．したがって

2個	ダイボール	(Diball)	1種
3個	トリボール	(Triball)	4種
4個	テトラボール	(Tetraball)	11種
5個	ペンタボール	(Pentaball)	33種

・・・・・・・・

というようになる．

2．ポリボールによる立体パズル

ポリボールによって立体詰め合わせパズルでできる立体のうち，比較的簡単で美しくすぐに考えられるものとしては，下記のようなものがある．

正四面体，　正八面体，　正方錐，　正三角六角錐

このうちはじめの3種は，面心立方格子の一部であり，最後のものは，六方最密格子の一部である．

具体的には，同一種，または n-ボールと (n-1)-ボールの組合せで作ってみるほうがよい．球の個数があって，できる可能性のあるものには，下記のようなものがある．

1．ダイボール ＋ トリボール　一辺3の正方錐と正三角六角錐（前者は後述）：球14個

2．テトラボールによる一辺4の正八面体：球44個

3. トリボール＋テトラボールによる一辺6の正四面体：球56個

4. ペンタボールによる一辺9の正四面体：球165個

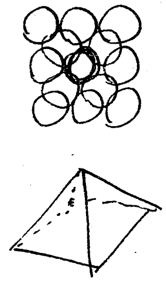
5. トリボール＋テトラボールによる一辺5の正方錐に1個余った球を最上につけた形：球55＋1個

これらはじっさいに，すべて作ることができる．4がもっとも難しく，やっと1972年4月上旬にはじめて1個作りあげることができた（[4]）．そのほか1については[2]，他は[3]，[4]にいくつか発表してある．

上記のもののうち，パズルとしててごろなのは，2であろう．これまで桑垣は手で，鏡像になるものを除いて，200種以上作成してある．1は小型すぎるが，解の総数が意外に多いのがおもしろい．

3. 月見パズル

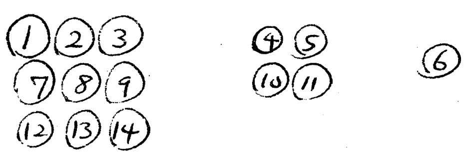
1の形で，一辺3の正四角錐状につむパズルは，でき上りが月見だんごのようなので，一松は「月見パズル」と命名した．一松は，小学生用の教材で，色のついた球（木製）をみつけ，これを針金や接着剤でつないで，ダイボールとトリボールを作ってみた．



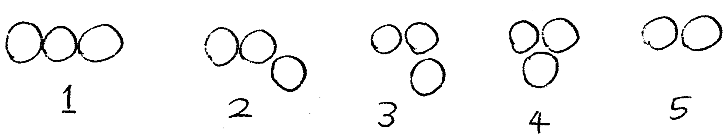
その後，これを電子計算機でしらべて，解の総数が144 種であることを求めた．そのうち，棒状のものが水平に底面の一辺にくるものが100種，これが斜めにおかれるものが44種である．―― 底面の中央におくと解がない．これはL型のものをどこにおいても，残りが切れてしまうことからわかるが，計算機でたしかめてもみた．――

ただし上記の解の数は，互いに鏡像になるものをも，別々に数えているので，実質的にはこの半分の72種である．
どの片をも頂点におくことが可能であり，とくにL型のものは＜型と∧型と両方のおき方ができる．なおまだ完全にたしかめていないが，ほとんどすべての解は互いに同類解のようで，対称図形のおきかえをすると，一つの解から次々に数多くの別の解が生成される（[2]参照）．

このパズルに対してとった方針は，[1]にのべたものとは異なって，つぎのような考え方であった．正方錐の各球の位置に番号をつける．便宜上図のようにしたが，これは結果の印刷の都合である．



これに1～5の片をはめるということは，1～14からなる集合を，それぞれ



3,3,3,3,2 個の要素からなる集合の直和に分解し，おのおのの集合の要素の表わす点の位置が，1～5の片とあえばよい．1～5の片は，隣り同志の球の中心の距離を1とすると，互い同志の距離が（片5のダイボールを除いて）

1，1，2 ； 1，1，$\sqrt{3}$； 1，1，$\sqrt{2}$ ； 1，1，1

という関係にある．すなわち，各球の中心の距離の2乗は，すべて整数で，その形にしておくと

1，1，4； 1，1，3； 1，1，2； 1，1，1

となる．これをしらべればよい．

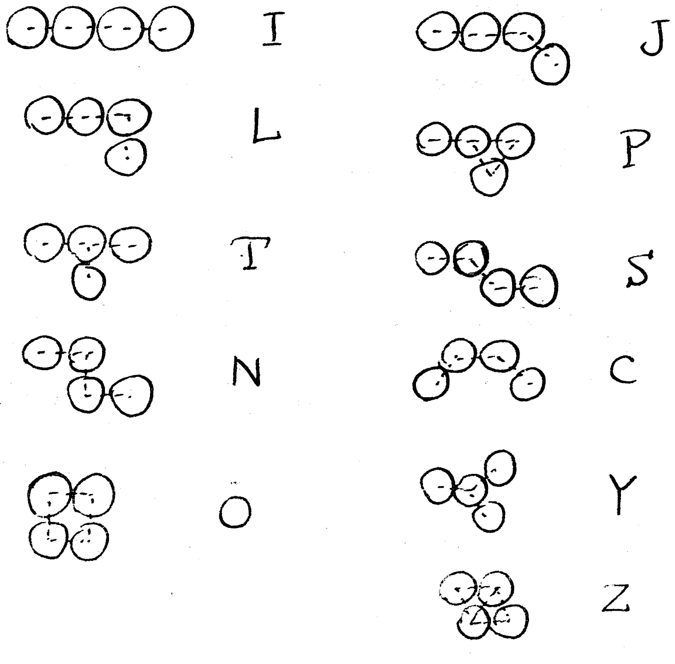
じっさいには回転対称性を定めるために，片1（棒状）をおく位置を定め，片2，3のおける可能性をすべてあらかじめしらべ，その組合せを定めて（球が重複するものは除く），のこりに4がはめられるか，そのときのこった2個が隣り同志か，としらべ，全部よければ，解を印刷し，片4，5を除いて他の可能性をしらべる，といった形をとった．調査は意外に早く，研究所の TOSBAC-3400 で（FORTRAN によるプログラムで）数分で完了した．

このパズルは，小学生でも十分にできるし，根気よくいろいろな解やその変形をしらべてゆくと，立体パズルのよい訓練になりそうである．ただし少し小型すぎる．

4. テトラボール

テトラボールについては，同じような手法で，一松が計算機による検査をはじめたが，現在までのところ，まだ予備的における位置を作りだしたら，回転操作を行なうサブルーチンを用意した段階で，本格的な解の探索にはいっていない．以下の例は，すべて桑垣が手で作ったものである．

結果を記述するために，テトラボールの各片に，つぎのようなアルファベットの名をつけることにする：



(テトロミノー系)　　　(テトラヘクス系)

回転による変換を標準化するため，Iを中央の正方形の最下におき，そこにおかれた片名を，断面を並べて表わす．

そして，分類は，I を含む正方形上にない2頂点（をしめた片の名），I を含む正方形の他の2頂点（をしめた片の名）を，それぞれアルファベット順に4つのローマ字で書く．Iはすでに使われ，Yは頂点をしめるようにはおけないが，他の9片はいずれも頂点におくことができるから，大分類上でははじめの2個の文字としては，I，Y以外の9個のうちから2個とった組合せ $_9C_2 = 36$ 通りの可能性があるが，じっさいに，この36種は，すべて可能である．計算機で探索するときには，数をへらすために，この36種の一つ一つについてしらべてゆくのが適当と思われる．

以下に[3]，[4]に示した形以外で，興味ある解の例を示そう．

例1．分類 CO−JS．これはテトロミノー系の4個が3方向，テトラヘクス系の6個が4方向の可能な平面上にあり，もっとも「立体的」なものである．

			JYNS			
	YC	TYY	JTNN	TSS		
C	JL	JTC	ZZLN	ZOL	SO	O
		ZLC	IIII	PPP	OP	

例2　分類 JP−LS．Oが中央の正方形の中央にあるものである．

```
                 LLLS
           YZZ   LOOS   CTC
J    ZZ    YNN   YOOJ   TTS   CC
     YJ    NNJ   IIII   PTS   PP   P
```

これはテトロミノー系の4個が、すべて同一方向の平面上にのっているから、わりあいに作りやすい形である。なお中央のLとOとの部分は対称形であるから、

```
OOL
OOL
 LL
```

といれかえて、JP-OSの形にもできる。

このパズルの解の総数は、立体ペントミノーの3×4×5の場合に匹敵するのではないかと予想される。

5. むすび

以上は、むしろ手で解いたものが主であり、計算機による探索は不十分であるが、本式に解の総数を探索するとすれば、長時間のjobとして、background jobの形で進めてゆく必要があると思うので、この集会で報告させていただいた。

この稿は、予稿を全部書き直した。3節以外は、桑垣の執筆した原稿を、一松が整理したものである。

参考文献

[1] 一松 信, 計算機によるプラパズル, 計算機によるゲームとパズルをめぐる諸問題, 研究集会報告集, 数理解析研究所講究録 98 (1970), p. 3—11.

[2] 一松 信, ミニ立体パズル, bit, 1972年7月号.

[3] 桑垣煥, テトラボールの正8面体, 現代数学, 1972年7月号

[4] 桑垣煥, 新立体パズル・ポリボール, 数学セミナー, (表紙にも説明と図), 数学セミナー, 1972年7月号.