

多項式の power-free な値について

岡山大 理 内山 三郎

§ 1. 序

k は 1 より大なる任意の整数とする。整数 n が 1 の他に k 乗巾の因数をもたないとき, n は k -th power-free あるいは簡単に k -free と呼ばれる。

$f = f(u)$ を r 次の有理整係数の多項式とする。P. Erdős [1] は, もし $r \geq 3$ で $f(n)$ が 1 の他に一定の $r-1$ 乗巾の因数をもたないならば, $f(u)$ は u の無限に多くの整数値 n に対して $(r-1)$ -free な整数を表わすことを証明した。最近 C. Hooley [2] は, $f(n)$ の値が $(r-1)$ -free となるような正の整数 $n \leq x$ の個数 $N(x)$ に対する漸近式をあたえた。

$f(u)$ が既約な多項式の場合その漸近式はつきゝの形をとる:

$$(1) \quad N(x) = Cx + O\left(\frac{x}{(\log x)^{B/\log \log \log x}}\right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

ここに $B > 0$ および C はともに多項式 $f(u)$ に依存する定数

であって、もし $f(u)$ が u の整数値に対して 1 の他に一定の $r-1$ 乗中の因数をもたないならば $C > 0$ である。Hooley [3] はまた 3 次の多項式 $f(u) = au^3 + b$ に対して漸近式 (1) における残余項が

$$O(x(\log x)^{-2/3})$$

に改良されることを証明している。

Erdős [1] はまた証明なしにつきのことを述べている。すなわち、 $f = f(u)$ が次数 $r \geq 2$ の有理整係数の多項式であって一次式の r 乗中に等しくないならば、 $f(p)$ の値が r -free となるような無限に多くの素数 p が存在する。しかしながら、これは必ずしも正しくない。例えば $f(u) = u^2 + 7$ とすればすべての奇素数 p に対して $f(p) \equiv 0 \pmod{2^3}$ である。

本稿では、多項式 f に関する適当な条件のもとに、 $f(p)$ が r -free となるような素数 $p \leq x$ の個数 $M(x)$ に対するひとつの漸近式をあたえたいと思う。その結果は少しばかり一般的な形に述べることができる。

さて、 $A = (a)$ は正の整数のある増加列とする。任意の実数 $x \geq 1$ に対して

$$A_x = \{a \in A : a \leq x\}$$

と書き、 A_x に含まれる整数の個数を $A(x)$ と表わすことに

する.

われわれはつぎの三つの条件をみたす整数列 A を考える:

(i) 定数 $B > 0$ および $c > 0$ が存在して

$$A(x) > B \frac{x}{(\log 2x)^c};$$

(ii) $A(x, k, l)$ によつて $a \equiv l \pmod{k}$ をみたす A_x の整数 a の個数を表わすとき, $(k, l) > 1$ であるような整数 k, l に対して $A(x, k, l)$ は一様に上に有界である;

(iii) 任意の固定された $E > 0$ および $H > 0$ に対して

$$A(x, k, l) = \frac{A(x)}{\varphi(k)} + O\left(\frac{A(x)}{(\log x)^H}\right)$$

が $1 \leq k \leq (\log x)^E$, $(l, k) = 1$ について一様に成立つ.

とくに, A がすべての素数からなる列であるとき, この A に対して上の三つの条件がみたされることはよく知られてゐる.

われわれは $f(a)$ が r -free となるような整数 $a \in A_x$ の個数を $M(x)$ で表わし, この $M(x)$ に対してひとつの漸近式をあたえる.

§ 2. 定理

$f = f(u)$ は次数 $r \geq 2$, 有理整数係数の原始多項式とする
もし f の判別式 D_f が 0 でないならば

$$(2) \quad M(x) = C A(x) + O\left(\frac{A(x)}{\log \log x}\right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

が成立つ. $C =$

$$C = \prod_p \left(1 - \frac{g^*(p^r)}{p^{r-1}(p-1)}\right)$$

で p はすべての素数の上にとり $g^*(k)$ は合同式

$$f(u) \equiv 0 \pmod{k}$$

の非同余な解 $u \pmod{k}$ のうち $(u, k) = 1$ をみたすものの個数を表わす.

§ 3. 定理の証明 (概要)

合同式 $f(u) \equiv 0 \pmod{k}$ の解 \pmod{k} の個数を $g(k)$ とすれば, $g(k)$ は乗法的関数である. すなわち $(k_1, k_2) = 1$ ならば

$$g(k_1 k_2) = g(k_1) g(k_2)$$

が成立つ. また, 素数の中 k に対し $g(k) = O(1)$ であり, 従って一般の正の整数 k に対し

$$g(k) = O(k^\varepsilon)$$

が任意の正数 ε を以て成立つこと、はよく知られている。

容易に分るようには、 $g^*(k)$ もまた乗法的である。明らかに、すべての k に対して $0 \leq g^*(k) \leq \min(g(k), g(k))$ である。

さて、 k を任意の正整数とし $f(a) \equiv 0 \pmod{k}$ をみたす整数 $a \in A_x$ の個数を $Z_k(x)$ と記すことにする。

$$\xi_1 = \log \log x$$

とおき、 $f(a)$ が ξ_1 を超えないどの素数の r 乗中でも割れないような整数 $a \in A_x$ の個数を $P(x)$ とすれば

$$M(x) = P(x) + R(x)$$

と書くことができる。すなわち、

$$P(x) = \sum_k \mu(k) Z_{k^r}(x)$$

で k は ξ_1 より大なる素因数をもたない square-free (すなわち 2-free) な正の整数の上に亘り、また

$$0 \leq -R(x) \leq \sum_{p > \xi_1} Z_{p^r}(x)$$

である。

整数列 A に対する条件 (ii), (iii) から容易に

$$P(x) = CA(x) + O\left(\frac{A(x)}{\log \log x}\right)$$

であることが分る. 定数 C は上の定理において記されたものである.

つきに

$$\xi_2 = (\log x)^{c+1}, \quad \xi_3 = \frac{x}{\xi_2}$$

とおき,

$$\begin{aligned} \sum_{p > \xi_1} Z_{p^r}(x) &= \sum_{\xi_1 < p \leq \xi_2} + \sum_{\xi_2 < p \leq \xi_3} + \sum_{p > \xi_3} \\ &= R_1(x) + R_2(x) + R_3(x) \end{aligned}$$

と書く.

条件 (i), (ii), (iii) により

$$R_1(x) = O\left(\frac{A(x)}{\log \log x}\right)$$

であり, また

$$R_2(x) = O\left(\frac{A(x)}{\log x}\right)$$

であることは直ちに分る.

$R_3(x)$ の評価は Hooley [2] の論法と並行に行なわれ,

$$R_3(x) = O\left(\frac{A(x)}{(\log x)^{B/\log \log \log x}}\right)$$

がえられる. ここに $B > 0$ は f へのみ依存する定数である.

これらの結果をあつめれば

$$R(x) = O\left(\frac{A(x)}{\log \log x}\right)$$

となり, 漸近式(2)がえられるのである.

われわれの定理の証明の詳細は別に発表する予定である ([4] 参照).

文 献

- [1] P. Erdős: Arithmetical properties of polynomials. Journ. London Math. Soc., 28(1953), 416-425.
- [2] C. Hooley: On the power free values of polynomials. Mathematika, 14(1967), 21-26.
- [3] ———: On the square-free values of cubic polynomials. Journ. für reine und angew. Math., 229 (1968), 147-154.
- [4] S. Uchiyama: On the power-free values of a polynomial. To appear.