

「グラフ極限で定義される Idempotential」

に関するノート

神子大 理 麦 林 布 道  
香川大 教育 青 木 昌 三

研究会で述べたことは論文として「プログレス」に投稿  
中であるので、<sup>1)</sup> 論文に書かれていないことはメモ  
しておくこととする。その一つは、グラフ極限に  
よって自己共役演算子を定義する論理で、Glimm-Jaffe の  
結果、よく文献<sup>2)</sup>の整理統合したものにすぎないが、重  
要であるので、取りまとめておきたい。他は、いわゆる高次  
評価の数学的帰納法による証明に関する。

I.  $\{H_n\}$  をヒルベルト空間  $H$  で稠密な定義域  $D(H_n)$   
をもつ自己共役演算子の列とする。各々の  $D(H_n)$  からベクト  
ル  $\phi_n$  をとってきて、 $\chi_n = H_n \phi_n$  とおいたとき、 $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$   
および  $\chi = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n$  が存在するとしよう。<sup>\*</sup> のような極限へ

<sup>\*</sup> 以下において、 $\lim_{n \rightarrow \infty}$  はすべて強収束を意味する。

ベクトルの全体  $\{x\}$ , 極限ベクトルの組の全体  $\{\phi, \chi\}$  をそれぞれ  $D_\infty, G_\infty$  で表わす。  $G_\infty$  がある対称演算子  $H_\infty$  のグラフになっているための必要十分条件は,  $D_\infty$  が  $\mathcal{D}_\infty$  で稠密な点集である。  $H_\infty$  を  $\{H_n\}$  の グラフ極限 という。  $H_\infty$  の自己共役性というには, 次の定理が便利である。

定理  $\{H_n\}$  をヒルベルト空間で稠密な定義域をもち,  $n$  と  $n+1$  との間で一様以下に有界な自己共役演算子の列とする。  $\{H_n\}$  のグラフ極限があり, レゾルベント  $R_n(z) = (H_n - z)^{-1}$  が  $z$  のある負の値に対して  $R(z)$  に強収束すれば,  $R(z)^{-1}$  が存在し,  $R(z)^{-1} + z$  で定義される演算子は自己共役で  $z$  に依らない。

定理を証明する前に, この定理が場の量子論に適用される一般的情况を例とあけて説明しておく。

構成的な場の量子論では,  $H_n$  は切断を伴った系の Hamiltonian を表わし,  $n$  有限は強い切断,  $n \rightarrow \infty$  は切断をある程度ゆるめるか, まは切断を全く取り除くことに相当する。  $n$  有限のときの  $H_n$  の自己共役性は, 通常, 正則摂動または異常摂動で確かめられる。  $H_n$  が  $n$  と  $n+1$  との間で一様以下に有界であることを最も端的にいうには,  $N$  を  $H_n$  の演算子といたとき, 一次評価

$$(1) \quad N \leq \text{const} (H_n + b)$$

が  $n$  に關して一樣に成り立つ (即ち,  $\text{const}$  は  $b$  が  $n$  に無關係とされる) ことを証明すればよい。

### 例 1. 空間切断を伴った $Y_2$ 理論<sup>\*</sup>)

運動量切断を併せて行えば, ボゾンの質量  $\omega(k) = \omega$  と  $i$  の  $\text{Idamiltonian}$   $H_n$  は正則擾動と異常擾動をくみ合せで, 自己共役演算子として定義される。  $n \rightarrow \infty$  は運動量切断を取り除くことに当る。<sup>3)</sup>  $n \rightarrow \infty$  と  $\omega$  と, ボゾンの質量  $\omega(k) = \omega$  は無限大となる。(1) の一樣評価は Dimock によって与えられる。<sup>4)</sup>

### 例 2. 中性スカラ一模型.

ボゾンの静止質量を  $m (> 0)$ , エネルギーを  $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$  とする。また, ボゾンの消滅, 生成演算子はそれぞれ  $a(\bar{f}) = \int a(k) \bar{f}(k) dk$ ,  $a^*(g) = \int a^*(k) g(k) dk$  ( $f, g \in L_2(\mathbb{R}^3)$ ) と与えられ, 交換関係  $[a(\bar{f}), a^*(g)] = (f, g)$  とみれば, 系の  $\text{Idamiltonian}$  は形式的に

$$(2) \quad H = H_0 + H_I + C$$

<sup>\*</sup>)  $Y_2$  理論とは, 二次元時空における Yukawa 型相互作用の理論をいう。

と書かれる。

$$(3) \quad H_0 = \int \omega(k) a^*(k) a(k) dk$$

は自由 Hamiltonian,

$$(4) \quad H_2 = \int (v(k) a^*(k) + \bar{v}(k) a(k)) dk$$

は相互作用 Hamiltonian,

$$(5) \quad C = \int |v(k)|^2 \omega(k)^{-1} dk$$

は、真空のエネルギーのくりこみを表わす項である。 $(2\omega)^{1/2}v$  は相互作用の項のくりこみを取る関数のフーリエ変換になっている。  $H_0$  は Fock 空間の本質的自己共役演算子で、閉包をとると  $C$  によって自己共役とみられる。

また、関数  $v(k)$  のノルム

$$\|v\|_j = \left[ \int |v(k)|^2 \omega(k)^{-j+1} dk \right]^{1/2} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

を導入し、各ノルム  $\|\cdot\|_j$  によって閉じた関数空間

$$G_j = \{v(k) \mid \|v\|_j < \infty\}$$

を考える。容易にわかるように、 $j < j'$  のとき、 $G_j$  は  $\|\cdot\|_{j'}$  ノルムによる位相で  $G_{j'}$  の稠密な部分空間になっている。

今までに知られている結果は次のとおりである。 $v \in G_1$  のとき、Hamiltonian (2) は正則摂動の理論によって定義される。 $v \in G_2$  のとき、(2) は二次形式の正則摂動として意味づけられる。これらの場合、 $C$  は  $C$  と  $C$  と有限である。 $v \in G_3$

よって  $v \in G_2$  ならば,  $C$  は無限大となるから,  $U = \int \dots$  演算子

$$(6) \quad U = \exp \left\{ \int (\bar{v}(ik) a(ik) - v(ik) a^*(ik)) \omega(ik)^{-1} dk \right\}$$

はそのままの意味を持ち続け, 全く形式的に計算をすれば

$$(7) \quad H = U H_0 U^{-1}$$

となる。この結果の数学的厳密な解釈が定理を適用するに  
よって述べられているのである。その際,  $H_n$  としては, (2)  
の中に入るような  $v \in G_3$  と  $\|\cdot\|_3$  ノルムで  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_3 = 0$   
の如く近似する  $v_n \in G_1$  で置き換えて述べられることがよく  
よい。なお, 相互作用に相当する  $v$  は  $G_4$  に属す。

### 定理の証明

$$\Delta = \{z; \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = R(z)\}$$

とかくと, 十分大きい  $n$  に対して,  $\Delta$  は  $H_n$  のレスポンス  
ト集合  $\rho(H_n)$  に含まれる。  $z_1, z_2$  のとき,  $R(z)$  はレスポンス  
ト方程式

$$(8) \quad R(z_1) - R(z_2) = (z_1 - z_2) R(z_1) R(z_2)$$

を満たす。この方程式から,  $R(z)$  の値域と核は  $z$  と無関係  
であることがわかる。

$H_n$  は下に一様有界であるから,  $\bigcap_n \rho(H_n)$  に属する負の  
数  $-b_0$  が存在する (一次評価 (1) の証明で言えば,  $b_0 = b$  と

とつてよい)。直ちにわかるように、 $\forall z \in (-\infty, -b_0)$  に対して、  
 $\|z R_n(z)\| < M$  の  $n$  によらずに成り立つ。  $H_\infty \equiv \{H_n\}$   
 の  $\mathcal{G}$  の極限とする。  $H_\infty$  の  $\mathcal{G}$  は

$$G_\infty = \{(\phi, \chi) ; \phi = \lim \phi_n, \chi = \lim H_n \phi_n, \phi_n \in D(H_n)\}$$

であり、  $H_\infty$  の定義域

$$D_\infty = \{\phi ; (\phi, \chi) \in G_\infty\}$$

の稠密性は仮定されている。

$\forall \psi \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$  と  $\forall z \in (-\infty, -b_0)$  によらず  $\|z R(z)\psi + \psi\|$  を考えよ。

$$\begin{aligned} \|z R(z)\psi + \psi\| &\leq \|z R(z)\psi - z R_n(z)\psi\| + \|z R_n(z)(\psi - \phi)\| \\ &\quad + \|z R_n(z)\phi + \psi\| + \|\psi - \phi\|. \end{aligned}$$

これに、  $\phi$  は  $D_\infty$  からとつてきた。不等式の右辺の最初の二項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \|z R(z)\psi - z R_n(z)\psi\| &\leq |z| \|(R(z) - R_n(z))\psi\|, \\ \|z R_n(z)(\psi - \phi)\| &\leq M \|\psi - \phi\| \end{aligned}$$

となり、残り二項は、  $\{\phi_n ; \phi_n \in D(H_n)\}$  に  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi$  となるような

数列をとって

$$\begin{aligned} \|z R_n(z)\phi + \psi\| &\leq \|z R_n(z)(\phi - \phi_n)\| + \|z R_n(z)\phi_n + \psi\| \\ &\quad + \|\psi - \phi_n\|. \end{aligned}$$

と書かれる。二つの各項は次のように評価される。

$$\|z R_n(z)(\phi - \phi_n)\| \leq M \|\phi - \phi_n\|,$$

$$\|z R_n(z) \phi_n + \phi_n\| = \|R_n(z) H_n \phi_n\| \leq \frac{M}{|z|} \|H_n \phi_n\|.$$

従って、二項を総合すれば

$$(9) \quad \|z R(z) \psi + \psi\| \leq \frac{M}{|z|} \|H_n \phi_n\| + |z| \|(R(z) - R_n(z)) \psi\| \\ + (M+1) \|\psi - \phi_n\| + (M+1) \|\phi_n - \phi_n\|$$

が任意の  $n$  と  $\forall z \in (-\infty, -b_0)$  に対して成り立つことがわかる。

先ず  $|z|$  を十分大きくとる。その結果、(9) の第 1 項は  $n$  によって一様小さくなる。次いで、 $z$  の値をそのまゝ固定して、 $n$  を十分大きくすると、(9) の第 2 項と第 4 項は小さくても小さくなる。  $D_\infty$  の稠密性が仮定されてゐるから、第 3 項もまた小さくできる。よって、 $z \in (-\infty, -b_0)$  での  $|z|$  が十分大きくなると、 $\forall \psi \in \mathcal{D}_\infty$  に対して  $\|z R(z) \psi + \psi\|$  は小さくても小さくなることを示せた。この結果から二つのことがいえる。第一、 $R(z)$  の接はベクトル  $0$  のみから成る。従って、 $R(z)$  は逆をもつ。第二、任意の  $\psi \in \mathcal{D}_\infty$  は  $-z R(z) \psi$  で近似できる。従って、 $R(z)$  の値域は  $\mathcal{D}_\infty$  で稠密である。故に、 $H = R(z)^{-1} \rightarrow z$  によって、稠密に定義域をもつ演算子  $H$  が定まる。この定義が  $z$  と無関係なことはソルベント方程式 (8) から明らか。  $z \in (-\infty, -b_0)$  のとき  $R(z)$  は対称かつ有界な演算子であるから、 $H$  は自己共役である。 ■

II. 強い切断のある  $\mathcal{H}$  の Idamiltonian の定義に便する振動論は, (a) 演算子の正則振動, (b) 二次形式の正則振動および (c) 異常振動である。これらの振動論によれば, 自乗の演算子  $N$ , 自由 Idamiltonian  $H_0$  および全 Idamiltonian  $H$  の定義域の間には次の関係がある。

$$(a) \quad D(N) \supset D(H_0) = D(H),$$

$$(b) \quad D(N^{1/2}) \supset D(H_0^{1/2}) = D((H+b)^{1/2}),$$

$$(c) \quad D(N) \supset D(H_0) \supset D(H).$$

二次形式の正則振動における定数  $b$  は  $H$  を正定値にするためのものである。

定義域の包含関係から直ちに, 次の補題によって  $N$  と  $H$  の大きさの比較が出来る。

補題 バナッハ空間において,  $T$  を閉演算子,  $A$  を可閉 (closable) 演算子とし,  $D(T) \subset D(A)$  を仮定する。正数  $d$  が存在して  $\|T\psi\| \geq d\|\psi\|$  ならば,  $\forall \psi \in D(T)$  に対して

$$\|A\psi\| \leq c\|T\psi\|$$

が成り立つ。

証明  $T$  をバナッハ空間  $X$  からバナッハ空間  $Y$  へ



の閉演算子,  $A$  を  $X$  から  $Y'$  への閉演算子とする。

$D(T) \subset D(A)$  であるから,  $A|_{D(T)}$  を考えると, これは閉演算子である。適当なノルム  $\|\cdot\|$  を導入して, そのノルム空間  $\hat{X}$  上で  $D(T)$  が Banach 空間

$$\hat{X} = \{D(T), \|\cdot\|\}$$

となれば,  $A|_{D(T)}: \hat{X} \rightarrow Y'$  は Banach の閉グラフ定理によって, いれど  $\hat{X}$  で定義された閉演算子, 従って有界演算子であることがわかる。即ち,  $\forall \psi \in D(T)$  に対して

$$\|A\psi\| \leq c\|\psi\|$$

となる。ここで  $c$  は  $A$  と  $T$  によって定まる定数である。閉演算子  $T$  によって補題の条件  $\|T\psi\| \geq d\|\psi\|$  がみたされていれば,  $\|\psi\| = \|T\psi\|$  とする事ができて,  $\|A\psi\| \leq c\|T\psi\|$  となる。■

5) 補題から, (b) については  $N$  と  $H$  の一次評価を, (a) と (c) については二次評価を導入して示すことができる。ところで, 構成的な場の量子論ではいろいろな形で高次評価を必要とし, 漸近場はその一例である。<sup>6)</sup> 漸近場の存在証明の要訣の一つは,  $a^\#(f)$  を  $a(\bar{f})$  または  $a^*(f)$  としたとき, Hamiltonian  $H$  との交換関係  $[a^\#(f), H]$  の定義域が, ある正の整数  $l$  に対して  $D(H^l)$  を含むことを示すことである。<sup>7)</sup>  $[a^\#(f), H]$  は

何れかの演算子  $N$  のある中でおさえられるから、高次評価

$$(10) \quad N^l \leq \text{const} (H+b)^l \quad l > 1$$

が証明されているのはこの問題は解決する。ここに  $b$  は十分大きい正数。

相互作用 Idamiltonian の条件

$$(11) \quad \int dk \| R^{1/2}(-b-w) [a(k), H_2] R^{1/2}(-b) \|^2 < \infty$$

(ただし、 $R(z) = (H-z)^{-1}$ ) をみたすとき、高次評価 (10) は数学的帰納法によって証明できる。

かんたんのため、ボソン場を例にとりて、一次評価から二次評価を出す筋道を示そう。他の場合、一般化への拡張は容易である。

$$\begin{aligned} N^2 &= N + \int dk a^*(k) N a(k) \\ &\leq \text{const} (H+b)^2 + \int dk a^*(k) N a(k). \end{aligned}$$

中1項の一次評価が便利である。中2項もまた  $(H+b)^2$  の定数倍でおさえられることを示す。そのためには、任意の  $\psi \in D(H)$  をとりて、 $\psi = R(-b)\varphi$  と書いたとき、不等式

$$(R(-b)\varphi, \int dk a^*(k) N a(k) R(-b)\varphi) \leq \text{const} \|\varphi\|^2$$

を示せばよい。この  $\varphi$  は "pull through formula"

$$(12) \quad a(k) R(-b) = R(-b-w) a(k) - R(-b-w) [a(k), H_2] R(-b)$$

を用いて計算を行えば求める結果がえられる。

$$\begin{aligned}
& (R(-b)\varphi, \int dk a^*(k) N a(k) R(-b)\varphi) = \int dk \| N^{1/2} a(k) R(-b)\varphi \|^2 \\
& \leq 2 \int dk \| N^{1/2} R(-b-w) a(k) \varphi \|^2 + 2 \int dk \| N^{1/2} R(-b-w) [a(k), H_1] R(-b)\varphi \|^2 \\
& \leq 2 \int dk \| N^{1/2} R(-b-w) (N+2)^{1/2} \|^2 \cdot \| (N+2)^{-1/2} a(k) \varphi \|^2 \\
& \quad + 2 \int dk \| N^{1/2} R^{1/2}(-b-w) \|^2 \cdot \| R^{1/2}(-b-w) [a(k), H_1] R^{1/2}(-b) \|^2 \cdot \| R^{1/2}(-b)\varphi \|^2 \\
& \leq \text{const} \int dk \| a(k) (N+1)^{-1/2} \varphi \|^2 + \text{const} \|\varphi\|^2 \\
& \leq \text{const} \|\varphi\|^2
\end{aligned}$$

注意 = 次形式の正則擾動 (b) では、相互作用

Hamiltonian はベクトル 0 を除く  $\mathfrak{h}_\gamma$  の 1 次元  $\mathbb{C}$  上で定義されるもので、条件式 (11) と pull through formula (12) を  $H_1$  が  $\mathfrak{h}_\gamma$  上でいさゝか気にする。この真は次のように解決できる。

= 次形式の正則擾動の一般条件

$$|( \varphi, H_1 \varphi )| \leq c( \varphi, H_0 \varphi ) + d( \varphi, \varphi )$$

より、対称演算子  $(cH_0 + d)^{-1/2} H_1 (cH_0 + d)^{-1/2}$  は  $\mathfrak{h}_\gamma$  の稠密な領域の上で有界となり、その閉包  $B$  は  $\mathfrak{h}_\gamma$  で有界な自己共役演算子である。  $[a(k), H_1]$  の両側に  $R^{1/2}(-b-w)$  と  $R^{1/2}(-b)$  をあてると、  $H_1$  を  $(cH_0 + d)^{1/2} B (cH_0 + d)^{1/2}$  で読みかえれば、(11) と (12) は = 次形式の正則擾動として意味をとることにあたる。

## 文献

- 1) M. Aoki and N. Mugibayashi, Prog. Theor. Phys. to appear.
- 2) J. Glimm and A. Jaffe, Commun. Pure Appl. Math. 22  
(1969), 401-414.
- 3) J. Glimm and A. Jaffe, Am. Phys. 60 (1970), 321-383;  
J. Funct. Anal. 7 (1971), 323-357.
- 4) J. Dimock, Harvard University preprint (1971)
- 5) 331213, L. Rosen, Commun. Pure Appl. Math. 24  
(1971), 417-457.
- 6) N. Mugibayashi, preprint (1971) (A talk delivered at the  
International Seminar on Statistical Mechanics and Field  
Theory, Idarfa, Israel, 1971 August)
- 7) Y. Kato and N. Mugibayashi, Prog. Theor. Phys. 30 (1963),  
103-133.