

Banach lattice における非線型半群とその例

東大理 小西芳雄

すでに短期共同研究で発表したものやこれから詳細を発表する予定の結果を証明を付けずに述べます¹⁾

§1 半群の生成

X Banach lattice $\ni f, g, \dots$

$$\varphi(f, g) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\|f + \varepsilon g\|^+ - \|f\|^+}{\varepsilon}$$

定義 (Konishi [8], Sato [20])

$$A: D(A) \subset X \longrightarrow X \quad \text{dispersive}$$

$$\iff \varphi(f - g, -Af + Ag) \geq 0 \quad \forall f, g \in D(A)$$

(この形の定義は佐藤氏の忠告による)

1) 「半群と発展方程式」(1971年7月), 「Navier-Stokes 方程式等の位相解析的数値解析的研究」(1971年11月), 「生物モデルの数学」(1972年2月).

命題 (Sato [19])

$$A: D(A) \subset X \longrightarrow X \text{ dispersive}$$

$$\iff \|((f - \lambda A f) - (g - \lambda A g))^+\| \geq \| (f - g)^+\|$$

$$\forall \lambda > 0, \forall f, g \in D(A)$$

定理 (Konishi [8], cf. Crandall-Liggett [5])

- (i) $A: D(A) \subset X \longrightarrow X$ dispersive
- (ii) $\overline{D(A)} = X$
- (iii) $R(I - \lambda A) = X \quad \forall \lambda > 0$
- $\Rightarrow e^{tA} f = s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]} f, t \geq 0, f \in X$
- (4又束は $t \geq 0$ に関し広義一様)
- が存在し $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ は X 上の 保順序半群 である:
- (a) $e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}, t, s \geq 0$ (半群性)
- $e^{0A} = I$
- (b) $s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} e^{tA} f = f, f \in X$ ((Co)性)
- (c) $\|(e^{tA} f - e^{tA} g)^+\| \leq \| (f - g)^+\|, f, g \in X, t \geq 0$

(保順序性)

と初期値に対する
連続的な依存

§2 若干の例

条件 (i) を具体的な函数空間で調べ例を計算する事は Sato [20] により行はわぬ。作用素の定義域をきると

決定し (iii) を導くことが重要となる。我々は特に非反射的位相空間について、例を述べよう。²⁾

連続関数の空間での例

例1 非線型熱方程式: $\partial u / \partial t - \Delta u + \gamma(u) = 0$

E 第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間

$\hat{E} = E \cup \{\Delta\}$ E の一点コンパクト化

$X = C_0(\hat{E}) \equiv \{f; \hat{E} \text{ 上連続且 } f(\Delta) = 0\}$

補題 (Sato [18])

$$\varphi(f, g) = \begin{cases} \max_x g(x) & f^+ \neq 0 \\ x; f(x) = \|f^+\| & \\ \max_{x; f(x)=0} g^+(x) & f \leq 0 \text{ 且 } \exists x \ f(x) = 0 \\ 0 & \forall x, f(x) < 0 \end{cases}$$

2) 高村 [7] が提起しているように、こうして構成した $e^{tA} f$ がいかなる意味で微分方程式 $du/dt = Au, u(0) = f$ の解となっているかを考えることが次に大事な問題となる;
(即ち [7] の問題 II)
具体的な方程式についてこの方向の研究として Crandall [註4] や Konishi [12] を参照。(一般論は未確立!)

補題 (cf. Sato-Ueno [17])

$$A : D(A) \subset C_0(\hat{E}) \longrightarrow C_0(\hat{E}) \quad \text{dispersive}$$

\Leftrightarrow

$u, v \in D(A)$ 且 $\sup(u-v) > 0$ なる φ のに対し

$\exists x_0 \in E \quad u(x_0) - v(x_0) = \sup(u-v)$ 且

$$(Au - Av)(x_0) \leq 0$$

$\wedge C_0(\hat{E})$ 上の Feller 半群の生成作用素

γ R^1 上の単調非減少連続函数, $\gamma(0) = 0$

命題 (Webb [23], Konishi [9])

$$\left. \begin{array}{l} D(A) = D(\wedge) \\ Au = \wedge u - \gamma(u) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(i), (ii), (iii)}$$

且

(iv) $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ は 劣 Markov 半群 である:

$$\lceil f \leq c \rceil \Rightarrow e^{tA} f \leq c \quad \forall c \in [0, \infty)$$

且

$$\lceil f \geq c' \rceil \Rightarrow e^{tA} f \geq c' \quad \forall c' \in (-\infty, 0]$$

例 2 u 及 v $\partial u / \partial t$ に非線型性のある熱方程式

$$\text{(Strauss [21, 22])} : \varphi(\partial u / \partial t) - \Delta u + \gamma(u) = 0$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 有界領域 $\partial\Omega$ 滑らか
 $X = C_0(\Omega) \equiv \{f; \bar{\Omega} \text{ 上連続且 } f|_{\partial\Omega} = 0\}$
 $\beta (= \beta^{-1})$ \mathbb{R}^1 上の単調増加連続函数, $\beta(0) = 0$
 且 $R(\beta) = \mathbb{R}^1$
 γ 例 1 と同じ

命題 (Konishi [10])

$$D(A) = \{u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,d+1}(\Omega); \Delta u \in C_0(\Omega)\}$$

$$Au = \beta(\Delta u - \gamma(u))$$

$$\Rightarrow (i), (ii), (iii), (iv)$$

($\Delta|_{D(A)}$ が半群を生成することは Masuda [15] による)。

註. Masuda [15] を使うと Δ のかわりにもっと一般の変数係数の二階楕円型作用素でもよい。
 さらに, 抽象的には, $\underbrace{\text{Pazy [16] の意味で}}_{\text{コンパクトな}} (C_0)$ 級非負縮小半群の生成作用素でもよい。

例 3 ロケットの気体の熱焼 (Forsythe-Wasow

$$[6]): \partial u / \partial t - \partial^2 u / \partial x^2 + F(\partial u / \partial x) = 0$$

$$X = C_{2\pi}(-\infty, \infty) \equiv \{f; \mathbb{R}^1 \text{ 上連続且 周期 } 2\pi\}$$

$$F \mathbb{R}^1 \text{ 上の非負連続函数で } F(0) = 0$$

命題

$$D(A) = \{ u \in C_{2\pi}(-\infty, \infty) ; u', u'' \in C_{2\pi}(-\infty, \infty) \}$$

$$Au = u'' - F(u')$$

$$\Rightarrow (i), (ii), (iii), (iv)$$

例4 - 階非線型方程式 (Крыжков [13], 相沢

$$[1]) \quad \partial u / \partial t = \beta(\partial u / \partial x)$$

$$X = C_0(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}) \quad \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$$

β 例2 と同じ

命題

$$D(A) = \{ u \in C_0(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}) \quad u' \in C_0(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}) \}$$

$$Au = \beta(u')$$

$$\Rightarrow (i), (ii), (iii), (iv)$$

 L^1 での例

$$\text{例5 非線型熱方程式} \quad \partial u / \partial t - \Delta u + \gamma(u) = 0$$

$$(S, \beta, m) \text{ 測度空間} \quad m(S) < \infty$$

$$X = L^1(S)$$

補題 (Sato [18])

$$\varphi(f, g) = \int_{\{x \in S; f(x) > 0\}} g(x) m(dx) + \int_{\{x \in S; f(x) = 0\}} g^+(x) m(dx)$$

\wedge $L^1(S)$ 上の (Kunita [4] の意味で) 劣 Markov な
縮小半群の生成作用素

γ 例 1 と同じ

命題 (Konishi [9, 11], Brezis-Strauss [3])

$$D(A) = D(\wedge) \cap \{u \in L^1(S); \gamma(u) \in L^1(S)\}$$

$$Au = \wedge u - \gamma(u)$$

\Rightarrow (i), (ii), (iii), (iv)

(Brezis 氏は [11] の結果を含む, 多価の場合を考察していることを
連絡してきた ([3] の下書き))

例 6 天然ガスの拡散, 太陽の紅炎の持続

$$(Ames [2]) \quad \partial u / \partial t = \Delta \beta(u)$$

Ω 例 2 と同じ

$$X = L^1(\Omega)$$

$$\Delta_1 = \Delta \text{ with } D(\Delta_1) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega); \Delta u \in L^1(\Omega)\}^{\text{3)}$$

β R^+ 上の単調増加連続函数で

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\beta(r)/r| > 0 \quad \text{且} \quad \beta(0) = 0$$

3) Δ_1 が半群の生成作用素と与えることは Brezis-Strauss [3] の
例にみられる (むしろ一般の二階楕円型作用素について考察している).

命題 (Konishi [9], Crandall [4])

$$D(A) = \{u \in L^1(\Omega) ; \beta(u) \in D(\Delta_1)\}$$

$$Au = \Delta \beta(u)$$

\Rightarrow (i), (ii), (iii), (iv)

(Crandall 氏の結果と筆者の結果は overlap する点が多い)

例 7 一階非線型方程式 $\partial u / \partial t = \partial \beta(u) / \partial x$ ⁴⁾

$$X = L^1(0, \infty)$$

β \mathbb{R}^1 上の単調増加函数で $\beta(0) = 0$

命題⁵⁾

$$D(A) = \{u \in L^1(0, \infty) ; \beta(u) \in L^1_{loc}(0, \infty), \frac{d\beta(u)}{dx} \in L^1(0, \infty)\}$$

$$Au = \frac{d\beta(u)}{dx}$$

\Rightarrow (i), (ii), (iii), (iv)

4) 最近 Crandall 氏が筆者に送ってきた下書きによると

例 7 を含むものと一般形式が取り扱えることがわかる。

"A semigroup, a generator and an elliptic equation associated with first order quasilinear equations in several variables!"

5) 渡辺二郎氏の忠告により改善された形で述べる。

—References—

- [1] 相沢貞一: 階偏微分方程式の global solution. 数学, 21, 11-23 (1969).
- [2] W. F. Ames: *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*. Academic Press, New York-London (1965).
- [3] H. Brezis and W. Strauss (to appear). ^{H. Brezis から送られた} _{その一部だけ参照.}
- [4] M. G. Crandall: *Semigroups of nonlinear transformations in Banach spaces, Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, Academic Press, New York-London, 1971, 157-179.
- [5] M. G. Crandall and T. M. Liggett: *Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces*, Amer. J. Math. 93 (1971), 265-298.
- [6] G. E. Forsythe and W. R. Wasow: *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. Wiley, New York-London (1960).
- [7] 高村幸男: Crandall-Liggett の結果と残った問題. 本講究録, 134, 1-5 (1972).
- [8] Y. Konishi: *Nonlinear semi-groups in Banach lattices*. Proc. Japan Acad., 47, 24-28 (1971).
- [9] Y. Konishi: *Some examples of nonlinear semi-groups*

- in Banach lattices. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA
 18, 527-533 (1972).
- [10] On the uniform convergence of a finite difference
 scheme for a nonlinear heat equation. Proc
 Japan Acad., 48, (1972) (to appear).
- [11] Une remarque sur perturbation d'opérateurs
 m -accrétifs dans espace de Banach II. Proc. Japan
 Acad., 48 (à paraître).
- [12] Une méthode de résolution d'une équation d'évolution
 non linéaire dégénérée. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA
 (à paraître).
- [13] С. Н. Кружков : Обобщенные решения задачи Коши в
 целом для нелинейных уравнений первого порядка.
 ДАН, 187, 29-32 (1969).
- [14] H. Kunita : Sub-Markov semi-groups in Banach lattices.
 Proc. Int. Conference on Functional Analysis and Related
 Topics (Tokyo), 332-343 (1969).
- [15] K. Masuda : On the integration of diffusion
 equations in some function spaces, I (to appear).
- [16] A. Pazy : On the differentiability and compactness of
 semi-groups of linear operators. J. Math. Mech., 17, 1131-1141 (1968).

- [17] K. Sato and T. Ueno : Multidimensional diffusion and the Markov process on the boundary. *J. Math. Kyoto Univ.*, 4, 529-605 (1964).
- [18] K. Sato : On dispersive operators in Banach lattices. *Pacific J. Math.*, 33, 429-443 (1970).
- [19] " : Positive pseudo-resolvents in Banach lattices. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA*, 17, 305-313 (1970).
- [20] " : A note on nonlinear dispersive operators. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA.*, 18, 465-473 (1972).
- [21] W. A. Strauss : Evolution equations nonlinear in the time derivative. *J. Math. Mech.*, 15, 49-82 (1966).
- [22] " : The energy method in nonlinear partial differential equations, 1967 Lecture Notes, IMPA, Notas de Matemática, Rio de Janeiro.
- [23] G. F. Webb : Continuous nonlinear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces (preprint).
- [24] 池田・渡辺 : 拡散過程の局所構造. *Seminar on Probability* vol. 35 (1971).