数理解析研究所講究録
161巻 1972年 183-187

Dirac作用素のスペクトルについて

京大 理　山田修宣

下記のことは、本研究集会の最後に追加講演として、発表させていただいた内容ですが、少し変えたところもあります。なお証明などの詳しい議論については、Publ. Res. Inst. Math. Sci. に発表される予定の、O. Yamada, "On the principle of limiting absorption for the Dirac operator" を見られたい。

unperturbed Dirac 作用素

$$L_0 = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta \qquad (i = \sqrt{-1})$$

と perturbed Dirac 作用素

$$L = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta + Q(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

を考えよう。ここで、α_j, β は、4×4 の、対称な (Hermitian) 定数行列で、$\alpha_4 = \beta$ とおいたとき次の関係をみたすとする。

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} I, \qquad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

（I は 4×4 の単位行列で，δ_{jk} はクロネッカーの記号である。）ポテンシャル $Q(x)$ は，4×4 の対称行列値の $\mathbb{R}^3$ の関数である。我々は，この Dirac 作用素をヒルベルト空間 $\mathcal{L}^2=(L^2(\mathbb{R}^3))^4$ で考える。ここで，$\mathcal{L}^2$ は $\mathbb{C}^4$ ベクトル値の $\mathbb{R}^3$ の関数 $u(x)=(u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ u_4(x))$ で

$$(\|u\|_{\mathcal{L}^2})^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 dx < \infty \text{、} \quad |u(x)|^2=\sum_{j=1}^{4}|u_j(x)|^2$$

をみたすものの全体である。内積は，$u, v\in\mathcal{L}^2$ に対して

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \langle u(x), v(x)\rangle dx, \quad \langle u(x), v(x)\rangle = \sum_{j=1}^{4} u_j(x)\overline{v_j(x)}$$

で与える。このとき L_0 は，一意的な自己共役作用素 H_0 をもち，その定義域は $\mathcal{H}^1$ に一致する，ことがわかっている（例えば，Kato [2]）。$\mathcal{H}^1$ は，$\mathcal{L}^2$ の関数で，一階の distribution の意味での偏微分もすべて $\mathcal{L}^2$ であるような関数全体の作る，ヒルベルト空間である。

自己共役作用素 H_0 のスペクトルについては，次のことが知られている（例えば，Mochizuki [3]）。

性質 1　$|\lambda|\geq 1$ であるような実数 λ は，すべて H_0 の連続スペクトルであり，区間 $(-1, +1)$ は H_0 の resolvent 集合に含まれる。

次に，$H=H_0+Q$ の自己共役性について考えよう。この問題については，Prosser [4] により次の結果が得られる。

性質 2　$Q(x)=Q_1(x)+Q_2(x)$ で、$Q_k(x)=(q_{ij}^{(k)}(x))$ $(k=1,2)$ とおく。$Q_1(x)$ については、$q_{ij}^{(1)}(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ $(i,j=1,2,3,4)$ がなりたち、$Q_2(x)$ については、ある正数 $p>3$ があって、$q_{ij}^{(2)}(x)\in L^p(\mathbb{R}^3)$ $(i,j=1,2,3,4)$ がみたされる、とする。このとき、$H=H_0+Q$ は、その定義域 $\mathcal{D}(H)$ が $\mathcal{D}(H)=\mathcal{D}(H_0)=\mathcal{H}^1$ であるような自己共役作用素である。

さて、Hのスペクトルの性質を調べよう。まず、本質的スペクトルについては、次の事実が示される。

定理 1　ある正数 $p>3$ があって、$|Q(x)|$ は局所的に $L^p(\mathbb{R}^3)$ かつ、$|Q(x)|=o(1)$ $(|x|\to\infty)$、とする。ここで、$|Q(x)|$ は $Q(x)=(q_{ij}(x))$ のとき、$|Q(x)|=\sqrt{\sum_{i,j}|q_{ij}(x)|^2}$ で定義する。そのとき、$H=H_0+Q$ の本質的スペクトルは、H_0 のそれと一致する。

次に、$(-\infty,-1)$ 又は $(+1,+\infty)$ に、Hの固有値が存在しないための十分条件を与える。この定理は、Roze [5] の線に沿って証明される。

定理 2　$Q(x)=(q_{ij}(x))$ は定理 1 の仮定をみたし、各 $q_{ij}(x)$

は、有限個の特異点を除いて一回連続的微分可能であり、かつ正の定数 C_1 と R_0 があって

$$\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial Q}{\partial x_k}\right| \leqq C_1 \qquad (|x| \geqq R_0)$$

さらに

$$|x|\,|Q(x)| \longrightarrow 0 \qquad (|x| \to \infty)$$

とする。このとき、$H = H_0 + Q$ は $(-\infty, -1)$, $(+1, +\infty)$ に固有値を持たない。

最近、Agmon [1] は、全空間の楕円型作用素に対して、極限吸収法とスペクトルの絶対連続性を論じているが、それを参考にすれば、Dirac 作用素に対しても同様のことがなりたつ。

定理 3　$Q(x)$ は定理 2 の仮定をみたしさらに、ある $h>0$ があって

$$|Q(x)| \leqq \frac{\text{const.}}{(1+|x|)^{1+h}} \qquad (|x| \geqq R_0)$$

とするとき、任意の $s > \frac{1}{2}$ と $(-\infty, -1)$ または $(+1, +\infty)$ に含まれる区間 $[a, b]$ に対して、ある定数 $C_2 = C_2(s, a, b)$ があって

$$\int_{R^3}(1+|x|)^{-2s}\left(|u(x)|^2 + \sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)\right|^2\right)dx \leqq C_2\int_{R^3}(1+|x|)^{2s}\left|(L-\lambda)u\right|^2 dx$$

が、すべての $u \in \mathcal{H}_s^1$ と、$a \leqq \mathrm{Re}\,\lambda \leqq b$、$|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqq 1$ なる、す

べての複素数 λ に対してなりたつ。ここで，$u\in\mathcal{H}^1_s$ とは

$$\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{2s}\left(|u(x)|^2+\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)\right|^2\right)dx<+\infty$$

なる関数全体である（微分は distribution の意味）。

（系）$H=H_0+Q$ のスペクトル分解を，$H=\int\lambda\,dE(\lambda)$ とおく。このとき，任意の $f\in\mathcal{L}^2$ に対して，$(E(\lambda)f,f)$ は λ の関数として，$(-\infty,-1)$，$(+1,+\infty)$ で絶対連続である。

REFERENCES

1 Agmon, S., Spectral properties of Schrödinger operators, Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome2, 679-683.

2 Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

3 Mochizuki, K., On the perturbation of the continuous spectrum of the Dirac operator, Proc. Japan Acad., 40(1964), 707-712

4 Prosser, T., Relativistic potential scattering, J. Mathematical Phys., 4(1963), 1048-1054.

5R Roze, S. N., On the character of the spectrum of the Dirac operator, Theoretical and Mathematical Physics, 2(1970), 377-382.