数理解析研究所講究録
161巻 1972年 180-182

Uniformly propagative system の散乱問題

山梨大（教育）　鈴木俊夫

次の方程式系（1）（2）を考える。

(1) $E D_t u = \sum_{j=1}^{n} A_j D_j u$

(2) $E(x) D_t u = \sum_{j=1}^{n} A_j D_j u$

$u = u(t,x) = (u_k(t,x))$ は $\mathbb{R}^m$-値のたてベクトル。

$t \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$ $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$

A_j；$(j=1,\cdots,n)$ は実対称 $m \times m$ 行列

E ：正定値実対称 $m \times m$ 行列

$E(x)$ ；実数値対称行列関数で次の性質をもつ。

；$\exists M, \exists m>0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$ $\xi \neq 0$

$$M \xi^* \xi \geqq \xi^* E(x) \xi \geqq m \xi^* \xi > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

方程式系（1）は Wilcox の意味で Uniformly propagative system であるとする。

$\sum^{m} \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$ の元 u, v に対して次の様な内積 $(u,v)_1$, $(u,v)_2$ を定義して得られるヒルベルト空間を $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ とする。

$$(u, v)_1 \equiv \int_{R^n} v^* E u \, dx$$
$$(u, v)_2 \equiv \int_{R^n} v^* E(x) u \, dx$$

$H_1 \equiv i E^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_j D_j$, $\widetilde{H}_2 \equiv i E(x)^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_j D_j$ はそれぞれ$\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$における自己共役作用素に拡張できるから、それを改めてH_1, $\widetilde{H}_2$としておく。($i = \sqrt{-1}$) また、$\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ は集合としては同じであるから有界作用素 J ; $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ で$Ju = u$ があって, $H_2 \equiv J^{-1} \widetilde{H}_2 J$ は$\mathcal{H}_1$で閉作用素となる。このとき$\{E_1(\lambda)\}$, $\{E_2(\lambda)\}$を各H_1, H_2 のスペクトル分解に伴うスペクトル族とする。次の定理が成立する。

定理

$E(x) - E = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ $\varepsilon>0$, $(x \to \infty)$ ならば、H_1の絶対連続スペクトルをIIとし、H_2の singular spectrum をeとすればeは高々可算集合であって、任意の$\mathrm{I} \subset \mathrm{II}$に対して

(i) 次のような$W_1^{\pm}$, $W_2^{\pm}$が存在する。

$W_1^{\pm}$; $E_1(\mathrm{I})\mathcal{H}_1 \longrightarrow E_2(\mathrm{I} - e)\mathcal{H}_2$ は bounded, onto

$W_2^{\pm}$; $E_1(\mathrm{I})\mathcal{H}_1 \longrightarrow E_2(\mathrm{I} - e)^*\mathcal{H}_2$ は bounded, onto

$E_1(\mathrm{I})\mathcal{H}_1$ の上で $H_2 W_{\pm}^1 = W_{\pm}^1 H_1$, $H_2^* W_{\pm}^2 = W_2^{\pm} H_1$ が成立する。

(ii) $w-\lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_2t} e^{-itH_1t} E_1(\mathrm{I})$ が存在して$W_1^{\pm}$に等しい。

$w-\lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_2^*t} e^{-itH_1t} E_1(\mathrm{I})$ が存在して$W_2^{\pm}$に等しい。

($w-\lim$ は弱極限を表わす)

(iii) $\forall \Gamma \ll I \quad E_2(\Gamma \cap e)$ は有限次元の射影である。

注意　この結果から $\Omega \equiv s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{i\tilde{H}_2 t} J e^{-iH_1 t} E_1(I)$ が存在すれば完備であることが言えるのでありますが、Ω の存在については計算の間違いがありましたので訂正させていただきます。

文献

(1) T. Ikebe "Scattering for uniformly propagative systems." Proceeding of International Conf. of F.A ('69)

(2) S.T. Kuroda "Scattering theory for differential Operators. I" (to appear)

(3) C.H. Wilcox "Transient Wave Propagation in Homogeneous Anisotropic Media." Arch. for RM&An. vol 37. pp 323~343 ('70)

(4) J. R. Schulenberger & C. H. Wilcox
Completeness of the wave operators for perturbation of uniformly propagative system.
Journal of Func. An. 7. (pp 447~474) ('70)