数理解析研究所講究録
161巻 1972年 163-179



# 非有界曲面の外部における
# $-\Delta+q$ の正の固有値の不存在

明大 工　今 野 礼 二

## §0. 序

2階楕円型作用素 $L$, $R^n$ の領域 $\Omega$ および正の数 $\lambda$ に対して

$$(1)\qquad \begin{cases} Lu = \lambda u & (\Omega \text{ で}), \\ u \in L_2(\Omega) \end{cases}$$

を満たす $u$ が恒等的に $0$ なもの以外ないかどうかを考える。いままでいろいろの $L$ および $\Omega$ についてこの種の問題が研究されており，多くの場合肯定的（＝不存在）結論を含むもっと精密な結果が得られているのであるが，ここでは2乗可積分解の不存在だけを問題にすることとし，（1）のほかに境界条件を要求するか否かによって問題を2つに分けることにしよう。

問題 1.　(1) を満たす $u$ は自明なものにかぎるか。

問題 2.　(1) のほかに，$\Omega$ の境界の少なくとも一部分で，ある同次境界条件を満たす $u$ は自明なものにかぎるか。

いままでのところ，問題1は，$\Omega$ が或る球の外部を含む場合についてのみ扱われているようであり，したがって問題1，2を区別する根拠も明確ではなかったが，境界が有界でない場合を対象にすれば，というよりはむしろ，問題を肯定的にする領域の形状をさぐるという立場からすれば，1と2は本質的に異なる問題のようである。それはそれとして，すでに得られている結果のいくつかを，詳しい条件は省略して代表的文献とともに書いてみると，問題1については

- $L$ が $-\Delta$ のとき： F. Rellich [7],
- $-\Delta + q(x)$ ： T. Kato [5], J. Weidmann [10,11], B. Simon [9], S. Agmon [1, 2, 3], K. Masuda [6],
- $-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x)$ ： S. N. Roze [8],
- $-\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1}\, b_i(x)\right) a_{ij}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\, b_j(x)\right) + q(x)$ :

T. Ikebe - J. Uchiyama [4].

問題2については，境界条件が Dirichlet ゼロ条件のときのみ扱われているようである。

。L が $-\Delta$ のとき： F. Rellich [7],

。$-\Delta + q$ ： S. Agmon [2]，(Masuda 氏も新らしい結果を持っておられると伺う)。

。$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q$ ： T. Tayoshi (to appear).

なお，問題1に相当することを Riemannian manifold の上で扱った例として T. Tayoshi 氏の結果がある(同上)。

問題1を念頭においた表題と多少ずれるが，各問題についての二三の新らしい結果を次節で与えよう。

## §1. 二三の結果.

前記のように，問題1は無限遠の全近傍を含むような $\Omega$ については，かなりよく解かれていたのであるが，そうでない $\Omega$ については如何であろうか。それについてはつぎの結果を得ることができる。$R^n$ 内の回転放物面（2次元ならば放物線，超平面は仲間に入れない）によって分けられる $R^n$ の領域のうち広いほうをその外部と呼ぼう。

<u>定理 1</u>. $\Omega$ は $R^n$ の領域, $q(x)$ は $\Omega$ で定義された実数値 $C^1$ 級関数で, $\lambda$ は正の数とする。もし $\Omega$ および $q(x)$ が

i) $\Omega$ は或る回転放物面の外部を含む;

ii) $|q(x)| = o(1)$, $|\nabla q(x)| = O(|x|^{-3/2})$ $|x| \to \infty$;

を満たすならば ( $|x|$ は原点からの距離),

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u + q(x) u = \lambda u & (\Omega \text{ で}), \\ u \in L_2(\Omega) \end{cases}$$

を満たす関数 $u(x)$ は恒等的に $0$ なるものにかぎる。

比較する曲面が回転放物面でなく, もっと拡がりの速い曲面, たとえば円錐の場合にどうであるかは残念ながらいまのところ不明である。ただし平面や柱状面では否定的である。これに反し問題2を肯定的にする領域はずっと狭くてよいがそのかわり境界の局所的形状が制限を受けるのは当然であろう。

Dirichlet 条件に関する問題2は, 前述の文献によってかなりよく解かれているが, その他の条件のもとでは, 特殊な領域以外にはわからない。特殊な例というのは, $\Omega$ の境界が遠方で $R^n$ の錐面, もしくは定点を焦点にもつ半放物線群

で織られる曲面に一致する場合である．この場合，Neumann条件あるいは，より一般に第三種条件（もちろん制限はつくが）のもとで $L = -\Delta + q$ について肯定的である。

２次元の場合にはもう少し一般的な結果を得ることができる。$xy$ 平面と複素平面を同一視し，$z = x + iy$，$\zeta = \xi + i\eta$，$z = f(\zeta)$ によって領域 $\Omega$ は $\xi\eta$ 面の半帯状領域 $\Xi = \{(\xi, \eta) \mid \xi \geqq \xi_0,\ \eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_2\}$ に一対一に写像されるとする．ただし，$f$ は $\Xi$ の近傍で一価正則と仮定する。したがって写像は境界をこめて等角であり，$x, y$ についてのラプラシアン $\Delta_{xy}$ は $J^{-1}\Delta_{\xi\eta}$，$J = |f'(\zeta)|^2$ に変換される。ここで最も本質的な仮定

『(A)　$\xi$ の非負関数 $\mu(\xi)$ が存在して $\int_{\xi_0}^{\infty} \mu(\xi)d\xi = \infty$ かつ　$(\xi, \eta) \in \Xi$ なら　$\partial J/\partial\xi \geqq \mu(\xi)$.』が満たされているとしよう．$\Omega$ の境界は $\{\eta = \eta_1\}$ に対応する $\Gamma_1$ と $\{\eta = \eta_2\}$ に対応する $\Gamma_2$，それと残りの部分とから成る．$\alpha_k(x) = \alpha_k(\xi, \eta_k)$　$(k = 1, 2)$　を

$$\text{(B)} \qquad 0 \leqq \alpha_k \leqq 1, \qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\alpha_k(\xi, \eta_k) \geqq 0$$

を満たす $\Gamma_k$ 上の関数とし，$q(x)$ を

$$\text{(C)} \qquad q(\xi, \eta) = o(1), \quad \frac{J}{\mu(\xi)}\frac{\partial q}{\partial\xi} = o(1), \quad \xi \to \infty$$

を満たす実数値関数とする。このとき

<u>定理 2</u>. $\lambda$ を正の数とする。条件 (A), (B), (C) のもとに, $\Omega$ で方程式

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u$$

を満たし, $\Gamma_k$ ($k = 1, 2$) 上で境界条件

$$(1 - \alpha_k(x))u + \alpha_k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

を満たす2乗可積分な関数 $u(x)$ は恒等的に $0$ なものにかぎる。

どのような $\Omega$ がこのような写像 $f$ を許すか, その幾何学的表現は未だ明らかではないが, 例として $f = e^{\zeta}$, $\zeta^{\alpha}$ ($\alpha > 1$), $\zeta \log \zeta$ などによる $\Xi$ の像がある。このとき境界はそれぞれ直線 (角領域の境界), $x^{1-\frac{1}{\alpha}}$ の増大度をもつ曲線, $\log x$ より穏い増大度をもつ曲線などとなる。なお, 証明の方法は複雑になるだろうが, 定理の条件を満たす2次元領域を回転して得られる $n$ 次元領域, あるいは境界を微小に変えたときの2次元領域でも成り立つことを証明できそうである。さらに, 定理の条件は $\Omega$ の一部分で成り立

てば十分である。

最後に，T. Tayoshi 氏の扱った manifold 上の問題について，氏の結果との間に論理的包含関係はないが，特に回転面の場合につぎの結果が成り立つ。

<u>定理 3.</u> $\mathfrak{M} = \{(x, \rho, \omega) \mid \rho = f(x),\ x > x_0,\ \omega \in S^{n-1}\}$ は曲線 $\rho = f(x)$ を回転して得られる回転面とする。もし $f$ が単調増大して発散する $C^2$ 級の関数であって，$\mathfrak{M}$ 上の実 $C^1$ 級関数 $q(P) = q(x, f(x), \omega)$，$P \in \mathfrak{M}$ が $q = o(1)$，$\partial q/\partial x = o(f'/f)$ $(x \to \infty)$ を満たすなら，$L = -\Delta + q$ （$\Delta$ は $\mathfrak{M}$ 上の Laplace-Beltrami 作用素）について問題1が肯定的である。

以上の3つの定理は，いずれも同じ技巧（S. Agmon に負う，cf.［1，Th. 2.6］）を用いて証明できる。もちろん他の技巧，たとえば T. Kato による方法，あるいは Agmon［3］，K. Masuda［6］によるより一般性をもった方法などを使うことは可能である。そしてそれらに応じてポテンシャル $q(x)$ に対する条件を変えたり緩めたりすることができるが，定理1，2，3の結果は $L = -\Delta$ の場合でもわかってはいなかったことのようであるから，最も簡単に証明

できる形で記述した。

## §2. 定理 1 の証明.

いろいろのやり方で証明できるが，回転放物面座標を導入して Agmon の技巧に結び付けるのがいちばん簡単なようである。 $R^n$ に適当なデカルト座標系 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ をとり，$(x_2, \cdots, x_n) = x' = |x'|\omega$ とおく．$\omega$ は $n-1$ 次元の単位ベクトル，いいかえれば $S^{n-2}$ 上の点である。変換

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) & \xi \geqq 0, \ \eta \geqq 0 \\ |x'| = \xi\eta & \\ \omega = \omega(\cdots) & \cdots \text{ は } S^{n-2} \text{ 上の曲線座標} \end{cases}$$

により新らしい変数 $\xi, \eta, \cdots$ を考えれば，これが回転放物面座標で，これにより $R^n$ の線素 $ds$ および計量テンソル $G$ はつぎのように表現される。ただし $ds'$, $G'$ のようにダッシュをつけたものは $S^{n-2}$ 上の量とする。

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + |dx'|^2 \\ &= (\xi^2+\eta^2)(d\xi^2+d\eta^2) \\ &\quad + \xi^2\eta^2 ds'^2 \end{aligned} , \qquad G = \begin{bmatrix} \xi^2+\eta^2 & 0 & \\ 0 & \xi^2+\eta^2 & \\ & & \xi^2\eta^2 G' \end{bmatrix},$$

さらに

$$J \equiv \sqrt{\det G} = \xi^{n-2}\eta^{n-2}(\xi^2+\eta^2)J'.$$

したがって微分幾何学の公式から，ラプラシアンは

$$\Delta = \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left\{\frac{1}{\xi^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^{n-2}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\eta^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^{n-2}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}$$
$$+\xi^{-2}\eta^{-2}\Lambda$$

となる．$\Lambda$ は $S^{n-2}$ 上の Laplace-Beltrami 作用素で $n=2$ のときこの項はない。$J$ は変換の Jacobian に相当する．

さて $\{\xi=一定\}$ なる曲面は，原点を焦点とする回転放物面である。はじめにデカルト座標を適当にとっておけば，定理にいう放物面は $\{\xi=\xi_0\}$ で表わされるであろう。したがって $\Omega \supset \Omega_0 \equiv \{\xi>\xi_0\}$. $\Omega_0$ で $u\equiv 0$ をいえば，一意接続定理から $\Omega$ でも $u\equiv 0$ となる．さらに，一般性を失うことなく $u$ は実数値としてよい。

$$v(x) \equiv \xi^{\frac{n-2}{2}}u(x)$$

とおく．$v$ は（$\xi, \eta, \cdots$ の関数とみて）

$$v'' - Av + Tv = 0$$

を満たす。ここにダッシュは $\partial/\partial\xi$ を意味し,

$$Af = -\frac{1}{\eta^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^{n-2}\frac{\partial f}{\partial\eta}\right) - \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2}\right)\Lambda f,$$

$$Tf = \left[(\lambda - q(x))(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{4}(n-2)(n-4)\xi^{-2}\right]f$$

である。$(\eta, \cdots)$ を $\sigma$ と書き

$$\Sigma = \{\sigma = (\eta, \cdots) \mid \eta \geqq 0,\ (\cdots) \in S^{n-2}\},$$

$$d\sigma = \eta^{n-2}\, d\eta\, d\cdots,$$

$$p(\xi) = \int_\Sigma v^2\, d\sigma$$

とおく。

$\int_\Omega u^2 dx > 0$ と仮定して矛盾を導こう。$p$ は連続だから,一意接続性を考慮すれば,任意の区間内に,$p(\xi) > 0$ が $I$ 上到るところ成り立つような部分区間 $I$ が存在することがわかる。Agmon に従って $Q(\xi) \equiv \log p(\xi)$ を考えよう。殆んどすべての(以下 a.e. と略す)$\xi \in I$ に対し $p''(\xi)$ が存在し(補題1),したがって

$$Q''(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}\left\{p''(\xi) - \frac{[p'(\xi)]^2}{p(\xi)}\right\}$$

であるが,積分記号下での微分が a.e. で許される(補題1)

ので, Schwarz の不等式と記号

$$F(\xi) = \int_{\Sigma} (vv'' - v'^2)\, d\sigma$$

を用いて

$$Q''(\xi) \geqq 2F(\xi)/p(\xi)$$

が導かれる. $F(\xi)$ は $\xi \geqq$ 十分大きな $\xi_1$ なら, a.e. で $M\int_{\xi}^{\infty} p(\xi')\,d\xi'$ より小さくないことが示される(補題2)から,

$$Q''(\xi) \geqq 2M\int_{\xi}^{\infty} \frac{p(\xi')}{p(\xi)}\,d\xi' \qquad \text{a.e. } \xi.$$

よって特に $Q(\xi)$ は $I$ 上で凸, したがって或る直線より上にある. $p(\xi)$ は連続だから, このことから有限な点で $p(\xi) = 0$ となると不都合を生ずるので, $\xi_1 \leqq \xi$ なら到るところ $p(\xi) > 0$ . しかも $\xi_1 \leqq \xi, \xi'$ なら, 或る $K > 0$ によって, $Q(\xi') - Q(\xi) \geqq -K(\xi' - \xi)$, i.e.

$$\frac{p(\xi')}{p(\xi)} \geqq e^{-K(\xi' - \xi)}$$

が成り立つ. これより

$$Q''(\xi) \geqq 2M\int_{\xi}^{\infty} e^{-K(\xi' - \xi)}\,d\xi' = \frac{2M}{K}.$$

したがって $Q(\xi) \uparrow \infty$ すなわち $p(\xi) \uparrow \infty$ となって

$$\int_{\xi_0}^{\infty} p(\xi)\,d\xi \leq \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\eta \int_{S^{n-2}} u^2 J\,d\cdots = \|u\|_{\Omega_0}^2 < \infty$$

に反する。

補　題　1.　$p'(\xi)$, $p''(\xi)$ が a.e. で存在し，$p$ とともに可積分かつ a.e. で次式が成り立つ．

$$(2)\quad p'(\xi) = 2\int_{\Sigma} v v'\,d\sigma\,,\quad p''(\xi) = 2\int_{\Sigma} (v v'' + v'^2)\,d\sigma.$$

証　明．　$p \in L_1$ は5行上の不等式が示す．関数 $f$ に対し（$D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$ として）

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|,\ \left|\frac{\partial f}{\partial \eta}\right| \leq C(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} |D^\alpha f|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}\right| \leq C(\xi^2+\eta^2)\Big(\sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha f|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つことが容易にわかるから，これを $f = v$ に適用すれば

$$\int_{\xi_0}^{\infty} |(2)\text{の各右辺}|\,d\xi \leq (u\text{の}\,\Omega_0\,\text{上の2階のソボレフノルム})^2$$

が出，しかも後者は $\Delta$ に関しての interior estimate の結果から有限である。（$\Omega_0$ は $\Omega$ の境界から離れているとしてよい。また，$\Omega_0$ は有界ではないが差障りはない．）あとは，微分して積分したものに Fubini を適用するだけ

である。

<u>補 題 2</u>. $\xi_1 \geqq \xi_0$ と $M > 0$ があって, a.e. $\xi \geqq \xi_1$ に対し $F(\xi) \geqq M\int_{\xi}^{\infty} p(\xi')d\xi'$.

<u>証 明</u>. $\sum_k = \{\sigma = (\eta, \cdots) \mid \eta > k, (\cdots) \in S^{n-2}\}$, $F_k(\xi) = \int_{\Sigma_k}(vv'' - v'^2)d\sigma$ とおく。 $(f, g) = \int_{\Sigma_k} fg\,d\sigma$ と書けば, $v'' - Av + Tv = 0$ から, a.e. で

$$F_k'(\xi) = (v', Av) + (v, Av') + (v, A'v)$$
$$-2(v', Tv) - (v, T'v) - 2(v', v'')$$
$$= -(v, T'v) - (v', Av) + (v, Av') + (v, A'v).$$

$A'$ は $A$ の $\xi$-微分, すなわち $A' = -\xi^{-3}\Lambda$, 右辺最後の項 $\leqq 0$ である。一方, $-(v', Av) + (v, Av')$ は部分積分によって

$$R_k(\xi) \equiv k^{n-2}\int_{S^{n-2}}\left[v'\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial v'}{\partial \eta}\right]_{\eta = k} d\cdots$$

に等しいことがわかる。したがって $F_k'(\xi) \leqq -(v, T'v) + R_k(\xi)$ であり, これを積分すれば,

$$F_h(t) = F_h(s) - \int_t^s F_h'(\xi)\,d\xi$$

(3)

$$\geq F_h(s) + \int_t^s (v, T'v)\,d\xi - \int_{\xi_0}^{\infty} |R_h(\xi)|\,d\xi .$$

$T'$ の主要な部分は $\partial\lambda(\xi^2+\eta^2)/\partial\xi = 2\lambda\xi$ で，他の部分は小さくなるように $q$ に対する条件を実は置いたのである．したがって $\xi \geq \xi_1$ なら $T' \geq M$ となるような $\xi_1$ ， $M$ が存在する．また $\int_{\xi_0}^{\infty} |F_h(\xi)|\,d\xi \leq$ ( $u$ の $\Omega_0$ 上の2階のソボレフノルム $)^2$ だから，$\{s_n\} \uparrow \infty$ が存在して $F(s_n) \to 0$。一方 $h$ を変数とみて $R_h(\xi)$ は $d\xi dh$ について可積分なこともわかるから，$\{h_n\} \uparrow \infty$ が存在して $\int_{\xi_0}^{\infty} |R_{h_n}(\xi)|\,d\xi \to 0$． したがって，(3) で $s = s_n$, $h = h_n$ とおいて $n \to \infty$ とすれば，$(v, T'v) \geq Mp(\xi)$ より $F(t) \geq M\int_t^{\infty} p(\xi)\,d\xi$ すなわち補題2を得る．

## §3. 定理2の証明の概要．

$(x, y) \xleftarrow{f} (\xi, \eta)$ が等角写像であることから，$-\Delta_{xy} u + q(x)u = \lambda u$ は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\lambda - q)Ju = 0$$

に変換される．ただし $\xi \geq \xi_0$, $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$, $J = |f'(\xi + i\eta)|^2$ である．境界条件は，$\eta = \eta_k$ ($k = 1, 2$) の

とき

$$(1-\alpha_k)u + (-1)^k \alpha_k \sqrt{J}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

となる．$A$ を形式的な微分作用素 $-\partial^2/\partial\eta^2$，$T = (\lambda - q(x))J$ とおくと，前節におけると同様，$u'' - Au + Tu = 0$ が成り立つ。したがって（$v$ のかわりに $u$ を使って）前節の方法がほとんどそのまま適用できる。違っている点は，（イ）“切口”$\Sigma = \{\eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_2\}$ は有界であること，（ロ）$T' = \partial T/\partial\xi$ は，こんどは定数のかわりに非可積分な正値関数で下から評価され，したがって補題２のかわりに $F(\xi) \geqq \frac{1}{2}\int_\xi^\infty \mu(\xi')p(\xi')d\xi'$（$\mu$ は条件（A）にあらわれる関数）が成り立つが，$p(\xi)\uparrow\infty$ を出すにはこれで十分であること．（ハ）補題２に相当する２行上の不等式の証明で（$F_R$ のかわりに $F = \int_\Sigma (uu'' - u'^2)d\eta$ に対して前節13頁の証明をならえばよいが），$A' = 0$ および $-(u', Au) + (u, Au') \leqq 0$ であること，の３点である．なお，この不等式は，境界条件を $\xi$ で微分した式と，$\partial\alpha_k\sqrt{J}/\partial\xi \geqq 0$ とに注意して，部分積分によって得られる式を評価すればよい．

## §4. 定理3の証明の概要.

$\mathfrak{M}$ は曲線 $\rho = f(x)$ を回転して得られる面であるから，"母線"方向の接ベクトルと回転方向の接ベクトルは直交し，したがって $\mathfrak{M}$ 上の線素と L-B 作用素は

$$ds^2 = (1+f'^2)dx^2 + f^2 ds'^2 \quad (ds \text{ は } S^{n-1} \text{上の線素})$$

$$\Delta = \frac{1}{f\sqrt{1+f'^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{\sqrt{1+f'^2}}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\sqrt{1+f'^2}}{f}\Lambda\right.$$

と表わされる。（$\Lambda$ は $S^{n-1}$ 上の L-B 作用素.） ここで $t = \int_{x_0}^{x}(\sqrt{1+f'^2}/f)\,dx$ とおくと，条件から $t \geqq \log f(x) - \log f(x_0) \to +\infty \quad (x \to +\infty)$ であって，しかも方程式 $-\Delta u + qu = \lambda u$ は $\ddot{u} - Au + Tu = 0$, $A = -\Lambda$, $T = (\lambda - q)f^2$ となる.（ドットは $\partial/\partial t$).
$\sqrt{1+f'^2}/f \equiv g$ とおけば，$\dot{T} = g(x)^{-1}\partial T/\partial x$ と条件とから，

$$\dot{T} \geqq \frac{\lambda f f'}{g} = \frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}(f^2).$$

右辺はもちろん非負かつ非可積分である. 以上のことから，$\Sigma = S^{n-1}$ として§2の論法が（ずっと簡単に）適用できて定理3が証明される。

# 文　　献


[1] Agmon, S., Uniqueness results for solutions of differential equations in Hilbert space with applications to problems in partial differential equations, Lectures in differential equations, Vol. II, A. K. Aziz General Editor, Van Nostrand Mathematical Studies, No.19. 1969.

[2] Agmon, S., Lower bounds for solutions of Schrödinger-type equations in unbounded domains, Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, 216 — 224, 1969.

[3] Agmon, S., Lower bounds for solutions of Schrödinger equations, J. d'Anal. Math., 23, 1 — 25 (1970).

[4] Ikebe, T. and J. Uchiyama, On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second-order elliptic operatos, J. Math. Kyoto Univ., 11, 425 — 448 (1971).

[5] Kato, T., Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient, Comm. Pure Appl. Math., 12, 403 — 425 (1959).

[6] Masuda, K., Schrödinger 型作用素の正の固有値と一意接続定理, 数研研究集会'位相解析的方法による偏微分方程式の研究'における講演, 1972年1月.

[7] Rellich, F., Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten, Jahresber. Deutsch. Math. Verein., 53, 57 — 65 (1943).

[8] Roze, S. N., On the spectrum of a second-order elliptic operator, Mat. Sbor., 80(112), 195 — 209 (1969). (Russian) = Math. USSR Sbornik, 9, 183 — 197. (English translation)

[9] Simon, B., On positive eigenvalues of one-body Schrödinger operators, Comm. Pure Appl. Math., 22, 531 — 538 (1967).

[10] Weidmann, J., On the continuous spectrum of Schrödinger operators, Comm. Pure Appl. Math., 19, 107 — 110 (1966).

[11] Weidmann, J., The virial theorem and its application to the spectral theory of Schrödinger operators, Bull. Amer. Math. Soc., 73, 452 — 459 (1967).