数理解析研究所講究録
161巻 1972年 105-124

双曲型混合問題の解の滑めらかさの伝播について

白田 平 (北大，理.)

§0. Motivation. 双曲型混合問題 (P, B_j)：

$$\begin{cases} P(D_t, D_x, D_y)u = f & t>0, \ x>0, \\ B_j(D_t, D_x, D_y)u = g_j & t>0, \ x=0, \ (j=1\cdots m), \\ D_t^k u = h_k & t=0, \ x>0 \ (k=0,\cdots 2m-1). \end{cases}$$

ここで

$D_x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x}$, $\left(P_{(\lambda)}(\tau, \lambda, \sigma) = \frac{\partial P}{\partial \lambda}(\tau, \lambda, \sigma) \right)$ 等,

P： $2m$ 階の t - strictly hyperbolic homogeneous operator. $P(0, \lambda, \sigma) \neq 0$ $((\lambda, \sigma) \neq 0)$,

B_j： $x=0$ について non-characteristic, homogeneous of order m_j, $m_j \neq m_i$ $(j \neq i)$, $m_i < 2m$ $(i = 1, \cdots m)$.

更に (P, B_j) は L^2-well posed と仮定する. このとき解 $u(t, x, y)$ の C^∞ となる位置 $X=(t, x, y)$ を決定したい.

α) "有界な境界を持ったconvex bodyの外部境界初期値問題の解は，初期dataについて影になる様な位置で，$f=g_j$

$=0$ $(j=1\cdots m)$ ならば，常に滑めらか（無限回微方可能）なのでないか”（Morawetz and Ludwig参照）．この問題の手始めとして，特に定係数の場合に上述の課題を取扱った．

この種の問題は従来物理的直感に従った大変多くの人々の興味をひいた様であるが，数学的にはこれからであろうと思われる．又一方ではCauchy problomに関する同様の問題についての考えより単純に入射波，反射波を処理すればよいと考えられたり，あるいは取扱うoperator上に直ちにsingularitiesが出て来て極端に困難なものと考えられているので，最も簡単な場合に解の滑めらかな位置は何に依存して決定されるのかを，出来るだけ変数係数の場合にも拡張される様な単純な方法で述べたい。

B）それ故直ちに一般的に述べることは止めて，方程式を例えば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_1\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_2\Delta\right) \qquad (a_1>a_2)$$

とし．又変数も$(t, x\ y)$の3変数として論ずることとする。

ここでの結論は“$f=g_j$ $(j=1,\cdots,m)=0$，supp h_k $\subset\{x>0\}$な場合，(P, B_j)がL^2- well pasedならば，初期dataのS.S.より出発する入射，反射，branch waveに対応する途以外で解は常にC^∞となる”（但し$x>0$で考える）。従ってL^2- well posedならば如何なる意味においてもsupersonic waveに対応する現象は生じない。 即ち極めてありふれた様子で解の regularity は伝はる。

γ) 一般論も得られると思うが，特に変数係数の場合には直接的にではないが，Maslov, Hörmander の考え方のそれを混合問題にまで持ち込める可能性は十分にあると考えられる。 但し現在までは一般論として，2階又はMaxwell方程式 の特別な混合問題における様に，$p(\tau, \lambda, \sigma) = 0$ の根λについての branch より出る head wave も生じない場合しか分っていない様子である。 以下前述の結論の証明を略述する。

§1. Preliminaries

α) (P, B_j) で $f = g_j = 0$, supp $h_k \subset \{x > 0\}$ としたとき，(t_0, x_0, y_0) $(t_0 > 0,\ x_0 > 0)$ での解uの様子を知るために，dualな問題 (P^*, B_j'):

$$\begin{cases} P^* v = f & t < t_1 \quad x > 0, \\ B_j' v = 0 & t < t_1 \quad x = 0 \quad (j = 1, \cdots, m), \\ D_t^k v = 0 & t = t_1 \quad x > 0 \quad (k = 0, \cdots, 2m-1) \end{cases}$$

を考える。 ここで $f \in C_0^\infty(R_+^{n+1})$, $R_+^{n+1} = \{t > 0, x > 0\}$, $t_0 < t_1$. supp $f \subset N(t_0, x_0, y_0)$。 このとき，$\forall f$,

$$|(u,f)| \leqq \sum_{k=0}^{2m-1} |(h_k, C_k(D)v)_{t=0}|$$

だが，右辺が $\leqq C_k\|f\|_{-k}$ $(\forall k)$ となるならば，u の N における C^∞ 性が分る。依って (P^*, B_j') について考えたらよいが，t 方向を逆にして記号の便宜上元の問題と同じ (P, B_j) によって，これを表はすこととする。（L^2-well posed の Def や，その特徴付けは数学 '72 参照）特に $t_0=0$，$x_0=s$，$y_0=0$ と考えて $f\in C_0(N(0,s,0))$ とする。この時混合問題の解

$$v(t,x,y) = v_c + v_R,$$

$$v_c = \iiint_{\mathrm{Im}\,\tau=-a} \frac{e^{i(t\tau+x\lambda+y\sigma)}}{P(\tau,\lambda,\sigma)} \hat{f}(\tau,\lambda,\sigma)\,d\tau\,d\lambda\,d\sigma,$$

$$v_R = \sum_{j=1}^{m} \iiint_{\mathrm{Im}\,\tau=-a} \frac{R_j(\tau,\sigma,x)\,B_j(\tau,\lambda,\sigma)}{R(\tau,\sigma)\,P(\tau,\lambda,\sigma)} e^{i(t\tau+y\sigma)} \hat{f}\,d\tau\,d\lambda\,d\sigma.$$

これを変型して

$$v_c = \iiint\cdot\iiint \frac{e^{i\{(t-t')\tau+(x-x')\lambda+(y-y')\sigma\}}}{P(\tau,\lambda,\sigma)} f(t',x',y')\cdot$$

$$\cdot\,dt'dx'dy'\cdot d\tau\,d\lambda\,d\sigma,$$

$$v_R = \sum_{g=1}^{m} \iiint\cdot\iiint \frac{\Delta_g(\tau,\lambda,\sigma)\,e^{i\{(t-t')\tau+x\lambda_g^+(\tau,\sigma)-x'\lambda+(y-y')\sigma\}}}{\Delta(\tau,\sigma)\cdot P(\tau,\lambda,\sigma)}\cdot$$

$$\cdot f(t',x',y')\,dt'dx'dy'd\tau\,d\lambda\,d\sigma.$$

ここで $\lambda_g^+(\tau,\sigma)$ は $P(\tau,\lambda,\sigma)=0$ の λ について

の根で

$$\mathrm{Im}\,\lambda_g^{+}(\tau,\sigma)>0 \quad (\mathrm{Im}\,\tau<0) \quad (g=1,2,\cdots,m),$$

$$\Delta(\tau,\sigma)=|B_j(\tau,\lambda_g^{+}(\tau,\sigma),\sigma) \quad (j\downarrow,g\rightarrow)|,$$

$$\Delta_g(\tau,\lambda,\sigma))=\left|\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (g) \\ B_j(\tau,\lambda_1^{+}(\tau,\sigma),\sigma),\cdots B_j(\tau,\lambda,\sigma),\cdots,B_j(\tau,\lambda_m^{+},\sigma) \\ (j\downarrow) \end{array}\right|.$$

依って被積分函数で (τ,λ,σ) にのみ関係する

$$G_c=\iiint\frac{1}{P(\tau,\lambda,\sigma)}e^{i\{(t-t')\tau+(x-x')\lambda+(y-y')\sigma\}}d\tau d\lambda d\sigma,$$

$$G_R=\sum_{g=1}^{m}\iiint\frac{\Delta_g(\tau,\lambda,\sigma)}{\Delta(\tau,\sigma)}e^{i\{(t-t')\tau+x\cdot\lambda_g^{+}(\tau,\sigma)-x'\lambda+(y-y')\sigma\}}\cdot d\tau d\lambda d\sigma$$

を $(t',y',x')\in N(0,s,0)$ で考え，Oscillatory integral 即ち

$$\varphi(\varepsilon\cdot(\tau,\lambda,\sigma)) \quad (\varphi\in C_0^{\infty}(R^{n+1}),\varphi(N(0)=1)$$

を積分中に乗じ $\varepsilon\to0$ のときこの積分が収束すれば これをその値と考えて，その後 $f(t',x',y')dt'dx'dy'$ で更に積分すればよい．（Hörmander ; Fourier Integ. I）．ここで supp f は十分小さな $N(0,s,0)$ にあるから

$$t-t'\longrightarrow t,$$

$$x'\quad\longrightarrow s,$$

$$y - y' \longrightarrow y$$

とおきかえ，上述の oscillatory Int. が任意のpolynomial $Q(\tau, \lambda, \sigma)$ を積分内に乗じても C^∞ となる (t, x, y) $(x>0,\ t>0)$ を定めればよい。以下 G_C, G_R はこの様な意味に解釈する。（更に必要ならば v_C, v_R の型で）。

β) G_C は Cauchy問題に関する基本解であるが，以下の記述の必要性より，これについても略述する．α)での注意の下で

$$G_C = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2m} \iint \frac{e^{i\{t\cdot\tau_p(\lambda,\sigma)+(x-s)\lambda+y\sigma\}}}{P_{(\tau)}(\tau_p(\lambda,\sigma),\lambda,\sigma)}\, d\lambda\, d\sigma$$

これの singularity は

$$\phi = t\tau_p(\lambda, \sigma) + (x-s)\lambda + y\sigma$$

としたとき，$\operatorname*{grad}_{(\lambda,\sigma)} \phi = 0$ となる (t, x, y) 上にある：

$$\begin{cases} x - s = -t\tau^p_{(\lambda)}(\lambda, \sigma), \\ y = -t\tau^p_{(\sigma)}(\lambda, \sigma). \end{cases}$$

これは $(0, s, 0)$ より出る初期条件 $(\tau^p(\lambda,\sigma), \lambda, \sigma)$ を持，た $\tau = \tau^p(\lambda, \sigma)$ に関する bicharacteristis line である。これが $x=0,\ t>0$ と交わるため

$$\Longleftrightarrow \quad \tau^p_{(\lambda)}(\lambda, \sigma) > 0.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda > 0 \to \tau^p(\lambda, \sigma) > 0,$$

$$\lambda < 0 \to \tau^p(\lambda, \sigma) < 0.$$

γ)　G_Rについても β) におけると全く同様に singularity の位置を定められる積分の部分がある：

$$O_{p,\varepsilon}=\{(\tau,\lambda,\sigma)\,|\ \ |R_e\tau-\tau_p(\lambda,\sigma)|<\varepsilon|(\lambda,\sigma)|,\ \mathrm{Im}\,\tau=-a\}$$

$$O_{0,\varepsilon}=\{R^{n+1}-ia\mathcal{N}\}-\sum_{p=1}^{2m}\overline{O_{p,\frac{1}{2}\varepsilon}},$$

$$\mathcal{N}=(1,0,\cdots,0).$$

φ_p，φ_0 を $O_{p,\varepsilon}$，$O_{0,\varepsilon}$ に関する partition unity 且つ homo. degree 0 とする．　積分は R^{n+1} に平行な所で考えているから $O_{p,\varepsilon}$，$O_{0,\varepsilon}$ は R^{n+1} の Covering と考え $\iiint_{\mathrm{Im}\,\tau=-a}$ は被積分函数 の τ を $\tau+(-a)i$ としたものと解してもよい。　又 $|(\tau,\lambda,\sigma)|<k$ の regularity は明らかだから，$|(\tau,\lambda,\sigma)|$ は大きい所だけで考える．

このとき

$$\sum_{q=1}^{m}\iiint_{\mathrm{Im}\,\tau=-a}\frac{\Delta_q}{\Delta\cdot P}e^{i\{t\tau+x\lambda_q^{+}(\tau,\sigma)-s\lambda+y\sigma\}}\varphi_0\cdot d\tau\,d\lambda\,d\sigma$$

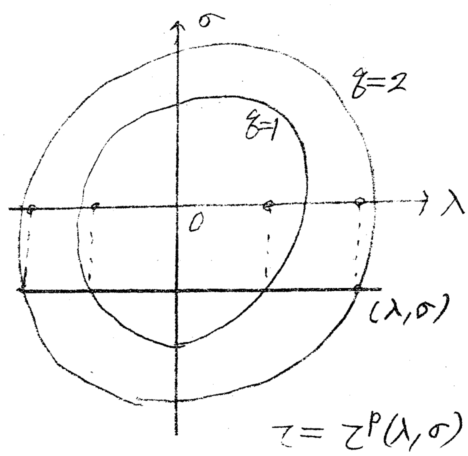
は regular　∵) $\frac{i}{s}\frac{\partial}{\partial\lambda}$ で部分積分をくりかえし（$\exists k>0$），$|\Delta(\tau,\sigma)|\geqq O(|\mathrm{Im}\,\tau|^{k})$，$|P(\lambda,\tau,\sigma)|\geqq C(|(\lambda,\tau,\sigma)|^{m}$ 且つ $\Delta(\tau,\sigma)$ は λ に無関係なことに注意すれば，被積分函数の $e^{i\{\ \}}$

を含まぬ因子のhomo. degree を如何程にも下げられる。又 $\varphi \in C_0^\infty(U_\varepsilon(\lambda_0,\sigma_0))$, homo. deg $\varphi = 0$,

$$G_{p,q}^{(\lambda_0,\sigma_0)} \equiv \iiint_{\tau=-a} \frac{\Delta_q}{\Delta\cdot P}\cdot e^{i\{t\tau+x\lambda_q^+(\tau,\sigma)-s\lambda+y\sigma\}}\cdot\varphi\cdot\varphi_p\cdot d\tau d\lambda d\sigma,$$

$(q=1,\cdots,m)$, $(p=1,\cdots,2m)$.

ここで $P(\tau^p(\lambda,\sigma),\lambda,\sigma)=0$ の λ に対する根は $\lambda_q^+(\tau^p(\lambda,\sigma),\sigma)$.



更にここで $\lambda_q^+(\tau^p(\lambda_0,\sigma_0),\sigma_0)$ が non-real の時, $G_{p,q}^{(\lambda_0\sigma_0)}$ は regular $(x>0)$. 但し ε は十分小さくとり, $|\Delta(\tau,\sigma)| \geqq O(|\mathrm{Im}\,\tau|^k)$ に注意。依って $\lambda_q^+(\tau^p(\lambda_0,\sigma_0),\sigma_0)$ が real の場合を考える。先づ $\Delta(\tau_0^p,\sigma_0)\neq 0$ ($\tau_0^p = \tau^p(\lambda_0,\sigma_0)$ のとき)

(係数は定数を重要視する必要なし)

$$G_{p,q}^{(\lambda_0,\sigma_0)} = C^\infty + \frac{1}{2}\cdot C\cdot \iint \frac{\Delta_q\cdot\varphi\cdot\varphi_p}{\Delta\cdot P_{(\tau)}(\tau^p(\lambda,\sigma),\lambda,\sigma)} e^{i\phi}\, d\lambda d\sigma$$

ここで

$$\phi = \phi_{p,q}^{(\lambda_0,\sigma_0)} = t\tau_p(\lambda,\sigma)+x\lambda_q^+(\tau_p(\lambda,\sigma),\sigma)+ +y\sigma - s\lambda.$$

更にすべての $\lambda_q^+(\tau,\sigma)$ は $\tau=\tau^p(\lambda_0,\sigma_0)$, $\sigma=\sigma_0$ の近傍

で double でない時を考える。

$$\underset{(\lambda,\sigma)}{\mathrm{grad}}\ \phi \neq 0 \qquad \text{at } (\lambda_0, \sigma_0)$$

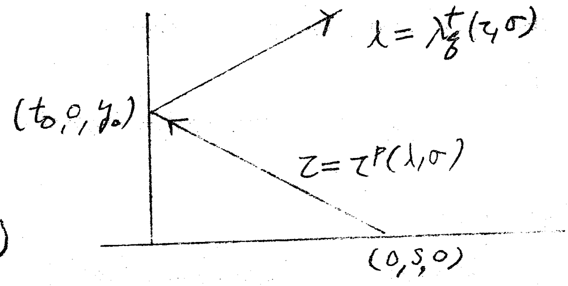
ならば，対応する $X=(t,x,y)$ で $G_{p,q}^{(\lambda_0,\sigma_0)}$ は regular.

(λ_0,σ_0)で，grad $\phi = 0 \iff$

$$\begin{cases} 0 = t\tau^p_{(\lambda)}(\lambda_0,\sigma_0) - s + x\lambda^+_{q(\tau)}(\tau^p(\lambda_0,\sigma_0),\sigma_0)\tau^p_{(\lambda)}(\lambda_0,\sigma_0), \\ 0 = t\tau^p_{(\sigma)}(\lambda_0,\sigma_0) + y + x(\lambda^+_{q(\tau)}\cdot\tau^p_{(\sigma)} + \lambda^+_{q(\sigma)})(\lambda_0,\sigma_0). \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t_0 = \tau^p_{(\lambda)}(\tau_0,\sigma_0)^{-1}s, \\ y_0 = -\tau^p_{(\lambda)}(\lambda_0,\sigma_0)^{-1}\cdot\tau^p_{(\sigma)}(\lambda_0,\sigma_0)s, \\ x_0 = 0, \\ \lambda(0) = \lambda_0,\ \sigma(0) = \sigma_0,\ \tau(0) = \tau^p(\lambda_0,\sigma_0) \end{cases}$$

より出発する $\lambda = \lambda^+_q(\tau,\sigma)$ の bicharacteristic line 上に $X=(t,x,y)$ がある.



ここで $\tau^p_{(\lambda)}(\lambda_0,\sigma_0) > 0$

$\rightarrow\ -\lambda^+_{q(\tau)}(\tau^p(\lambda_0,\sigma_0),\sigma_0) > 0$

を注意しなければならぬ。 以降考える X は compact set を動くものとし，それに応じて ε をえらぶ.

§2. Lopatinskii determinant 及びその $(m-1,m-1)$ 小行列式について. (♯)条件を仮定する。 (P,B_j)が L^2-well posed のとき，

［補題1］ $\lambda_q^+(\tau_0,\sigma_0)$ 及び $\lambda_q^-(\tau_0,\sigma_0)$ が夫々相異なる時 $(q=1,2,\cdots,m)$,

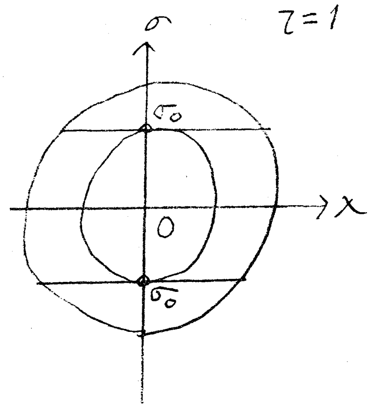
$$|\Delta_q(\tau,\lambda_p^-(\tau,\sigma),\sigma)| \leqq C(\tau_0,\sigma_0)\cdot|\Delta(\tau,\sigma)|\cdot|P_{(\lambda)}(\tau,\lambda_p^-(\tau,\sigma),\sigma)|\cdot|\mathrm{Im}\,\tau|^{-1}\cdot|\lambda_p^-(\tau,\sigma)|^{\frac{1}{2}}\cdot|\lambda_q^+(\tau,\sigma)|^{\frac{1}{2}}.$$

ここで $\tau=\tau_0+\delta'-i\varepsilon$, $\sigma=\sigma_0+\delta''$. (δ', ε, δ'' 十分小, $\varepsilon>0$).

(数学 '72 参照). 以下［補題1］の仮定の下で,

［補題2］ (τ_0,σ_0) について $\lambda_q^\pm(\tau_0,\sigma_0)$ が real, distinct $(q=1,\cdots,m)$ ならば, $\Delta(\tau_0,\sigma_0)\neq 0$

(北大紀要 参照).



［補題3］ $\lambda_1^\pm(\tau_0,\sigma_0)$ だけが real, double, 他の $\lambda_q^\pm(\tau_0,\sigma_0)$ が real distinct ならば, $\tau=\tau_0-i\varepsilon$, $\sigma=\sigma_0$ について $(\varepsilon>0)$

$$|\Delta(\tau,\sigma)| \geqq O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

［補題4］ $\lambda_1^\pm(\tau_0,\sigma_0)$ が complex (non-real), 他は real, distinct ならば,

$$|\Delta(\tau,\sigma)| \geqq O(\varepsilon^{1}).$$

これらの補題は,［補題1］より［補題2］を証明した方法を用いて得られるが, 少し面倒である。 それらの証明を用いて

［補題5］ ［補題3］, 4］の仮定の下で, $\Delta(\tau_0,\sigma_0)$ の $\lambda_1^\pm$ を含まない m ヶの小行列式 ($(m-1,m-1)$ 型) は同時に zero で

はない。補題5の仮定の下で、

［補題6］ $P \equiv (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1\Delta)(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2\Delta)$ $(a_1 > a_2)$ とした時，更に $P_2 \equiv (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2\Delta)$ とする． この時

$$\begin{cases} P_2 u \in C^{\omega}(\bar{R}_+^{n+1}), \\ t_0 > 0, \quad a.s.s.\ B_j u\big|_{x=0} \subset C, \quad (j=1,2,\cdots,m), \\ D_t^k u \in C^{\omega}(\bar{R}_+^n),\ t \leqq 0, \qquad (\forall k = 0,1,\cdots) \end{cases}$$

とするなら，$a.s.s.\ u \subset C + C_{a_2}$ ($x \geqq 0$ で考える)．

ここで $C_{a_2} = \{(t,x,y) \mid t^2 \geqq a_2(x^2+y^2)\}$.

この補題は［補題5］及び混合問題についての部分的解析解の存在を用いて示す。（北大紀要 '72参照）他の方法も，定係数なら採用出来るであろう．

尚 (P, B_j) が L^2- well posed → その dual problem（t-方向は逆）も L^2- well posed なことを注意する．

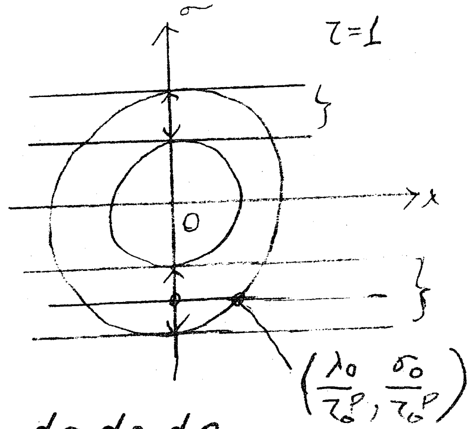
§3. Supersonic wave の非存在及び補題

α) $(\tau_0, \lambda_0, \sigma_0)$ について次の仮定をする： p を固定して

$\Delta(\tau_0^p, \sigma_0) = 0$， かつ $(\tau_0^p = \tau^p(\lambda_0, \sigma_0))$

$\lambda_g^{\pm}(\tau^p(\lambda_0,\sigma_0),\sigma_0)$ はすべて $(g = 1,2,\cdots m)$ 相異なる。 §1の残りの部分は上の場合及び $\lambda_g^{\pm}$ が double の場合であるが，後者は§4で述べる． 即ち

$\mathrm{supp}\,\mathcal{F}\varphi_p \subset \{(\tau,\lambda,\sigma) \mid$



$$|\tau - \tau^p(\lambda,\sigma)| < \varepsilon\rho,$$
$$\rho = |(\lambda,\sigma)|,$$
$$(\lambda,\sigma) \in U_\varepsilon(\lambda_0,\sigma_0):$$
$$\text{conical n.b.d.}\ \},$$

更に
$$U_{pq} \equiv \iiint_{\operatorname{Im}\tau=-a} \frac{\Delta_q}{\Delta\cdot p}\, e^{i\phi}\cdot\varphi\cdot\varphi_p\, d\tau\, d\lambda\, d\sigma,$$
$$\phi \equiv \phi_q \equiv t\tau + x\lambda_q^+(\tau,\sigma) + y\sigma - s\lambda.$$

ここで（$\lambda \gtrless 0$ として）$\tau^p(\lambda,\sigma) > 0$ の場合だけ考えたらよい。この例では $p=2$ で

$$\lambda_2^\pm(\tau^2(\lambda_0,\sigma_0),\sigma_0)$$

は real（non-real な場合は既に済んだ）.

さて［補題 1］より，この場合 $\lambda_0 = \lambda_2^-(\tau^2(\lambda_0,\sigma_0),\sigma_0)$ と考えられるから，

$$\left|\frac{\Delta_q(\tau,\lambda,\sigma)}{\Delta(\tau,\sigma)}\right| < k < \infty.$$

ここで $\tau = \tau^2(\lambda_0,\sigma_0)+\delta' - i\varepsilon,\ \sigma = \sigma_0 + \delta''$ とする．更にこの時，$\lambda_q^\pm(\tau,\sigma)$ は analytic だから，

$$\frac{\Delta_q(\tau,\lambda,\sigma)}{\Delta(\tau,\sigma)} \qquad (q=1,2).$$

は $C^\omega(N(\operatorname{Supp}\varphi\cdot\varphi_p))$. 依って §2 での方法はその

まま適用されて，対応する bicharacteristic line 上にのみ singularity があり得る。

(B) 次に $\lambda_q^{\pm}$ が double の場合であるが，このための補題を述べる。

〔補題7〕 $\rho = |(\lambda, \sigma)|$,

$$u_\rho \equiv \iiint \frac{1}{P(\tau, \lambda, \sigma)} e^{i\{t\tau + (x-s)\lambda + y\sigma\}} d\tau d\lambda d\sigma$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Im m\,\tau = -a \\ |\mathrm{Real}\ \tau - \tau^{\rho}(\lambda, \sigma)| < \varepsilon\rho \end{array}\right\}.$$

とする。この時 U_ρ は対応する bicharacteristic lines を除いて analytic.

〔補題8〕 積分 $U_{\rho, q} \equiv \iiint \frac{\Delta_q}{\Delta \cdot P} e^{i\Phi}\ d\tau d\lambda d\sigma$

$$(\Im m\,\tau = -a;\ |\mathrm{Real}\ \tau - \tau^{\rho}(\lambda, \sigma)| < \varepsilon\rho)$$

は $t < 0$ $x \geqq 0$ で analytic。ここで $\phi = t\tau + x \cdot \lambda_q^{+}(\tau, \sigma) - s \cdot \lambda + y\sigma$.

〔〔補題7〕，8〕の証明は被積分函数が，$|(\tau, \lambda, \sigma)| > 1$ の時，

$$|(\tau, \lambda, \sigma)|^{-m-1-N} C(CN)^N$$

で押えられる様に積分路を変更したり又（λ, σ についての）部分積分をして分る。ここで Boman-Hör. の $\chi_N(\tau, \lambda, \sigma)$ を数回使用する。実際〔補題7〕では，留数をとる部分と残りの部分に分け $a_1 \cdots a_j$ が analytic function $(|a_i| \leqq 1)$ の時、

$$|D_{i_1} a_{i_1} D_{i_2} a_{i_2} \cdots D_{i_j} a_{i_j} \chi_N| \leq C(CN)^j \ (j \leq N)$$

となることを使う。これは compact set 上で考えている。

又［補題 8］では積分路に、各の (λ,σ) について

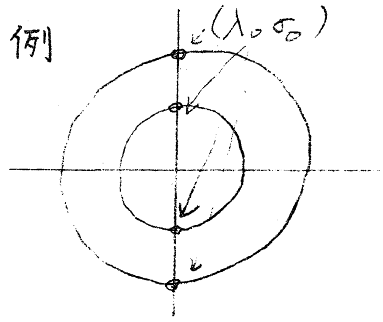
$$\tau \in [\tau^p(\lambda,\sigma) \pm \varepsilon\rho - ia,\ \tau^p(\lambda,\sigma) \pm \varepsilon\rho - i\infty]$$

を加えて，$\rho = |(\lambda,\sigma)| \geq |\tau|$ では $\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\lambda}$ を施し，$\rho \leq |\tau|$ では $\mathrm{Re}\, i\phi \leq -|t||\mathrm{Im}\,\tau|$, $|\mathrm{Im}\,\tau| \sim |\tau|$ を用いて上述の注意により、その解析性を知る。（§4 で用いる）

γ) $\lambda_g^{\pm}(\tau^p(\lambda_0,\sigma_0))$ が real double で，更に λ_0 と一致した場合.

$$\frac{\partial \tau^p}{\partial\lambda}(\lambda_0,\sigma_0) = -\frac{P_{(\lambda)}}{P_{(\tau)}}(\tau_0^p,\lambda_0,\sigma_0) = 0$$

だから 対応する bicharacteristic line は決して $x=0$ と交わらないから一応考える必要のない様に思われるが，例えば，$p=1$ の時，



$$P_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_i\Delta$$

とおけば，

$$\begin{cases} P_1 P_2(\widetilde{U}_{11} + \widetilde{U}_{12}) = 0 & (t>0,\ x \geq 0), \\ B_j(\widetilde{U}_{11} + \widetilde{U}_{12}) = B_j(\widetilde{U}_1) & (j=1,2),\ (x=0), \\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}(\widetilde{U}_{11} + \widetilde{U}_{12}) \in C^\infty & (t<0,\ x \geq 0), \\ & (k=1,2,3). \end{cases}$$

ここで $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_{11}$, $\tilde{U}_{12}$ 等は β) における積分の中に更に §1, γ), §3, α) における様に $\varphi(\lambda, \sigma)$ を乗じておくものとする。上の第3式は補題7と同様に証明されるが,

$$S.S.\ B_j(\tilde{U}_1)_{|x=0} \subseteqq S.S.\ \tilde{U}_{1|x=0}.$$

右辺は任意の compact set $K \subset \{x \geqq 0\}$) に対し ε を十分小さくとれば, γ) の初めの式より K 上で C^∞ となり, L^2-well posed な問題の regularity Theorem. 及び locally uniqueness より $\tilde{U}_{11} + \tilde{U}_{12}$ の regularity は分る。第2の入射波に関しても全く同様である.

§4 Head wave.

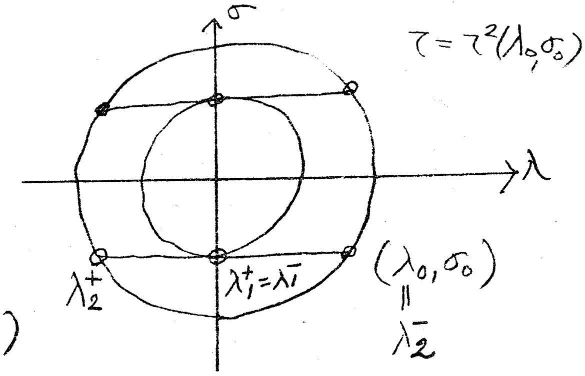
α) §3 より残りの積分は第2の入射波についてであるが, $C_2 \equiv \{x = 0\}$ と第2の入射 bichara. lines との交わりとすれば, §3, β) の U_2, U_{21}, U_{22} について,

$$\begin{cases} P_1 \cdot P_2 (U_{21} + U_{22}) = 0, \\ B_j(U_{21} + U_{22}) = B_j(U_2) \quad (x = 0), \\ \dfrac{\partial^k}{\partial t^k}(U_{21} + U_{22}) \in C^\omega \quad (t < 0, x \geqq 0), (\forall k). \end{cases}$$

ここで §3 より以上考えたものより以外 singularity が出る可能性のあるのは, $p = 2$ で

$$\lambda_0 \neq \lambda_q^+(\tau^p(\lambda_0, \sigma_0)) = \lambda_q^-(\tau^p(\lambda_0, \sigma_0))$$

$q = 1, 2.$



に関してである。

先づ $U_{2,q}$ について $((\lambda_0, \sigma_0)$ を bix)。ここで $\Delta(\tau^p(\lambda_0, \sigma_0)$ $\sigma_0) = 0$ となることはあっても，$\frac{\partial}{\partial p}$ での部分積分を考えると，p は $\Delta(\tau^p(\lambda', \sigma'), \sigma')$ には関係ないから $((\lambda_0, \sigma_0) = p(\lambda_0', \sigma_0'))$，$U_{2,q}$ から出てくる singularity の可能性は

$$(**)_q,\ 0 = t\tau^2(\lambda_0, \sigma_0) + x\lambda_q^+(\tau^2(\lambda_0, \sigma_0)\sigma_0) + + y\sigma_0 - s\lambda_0$$

上にもある。$(q = 1, 2)$

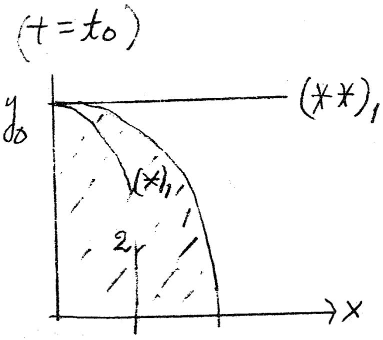
$$\begin{cases} P\left(\sum_{q=1,2} U_{2,q}\right) = 0, \\ a.s.s.\ B_j\left(\sum_q U_{2,q}\right)_{|x=0} \subseteqq C_2\ (j = 1, 2, \cdots, m), \\ \sum_{q=1,2} U_{2,q} \in C^\omega\ (t < 0). \end{cases}$$

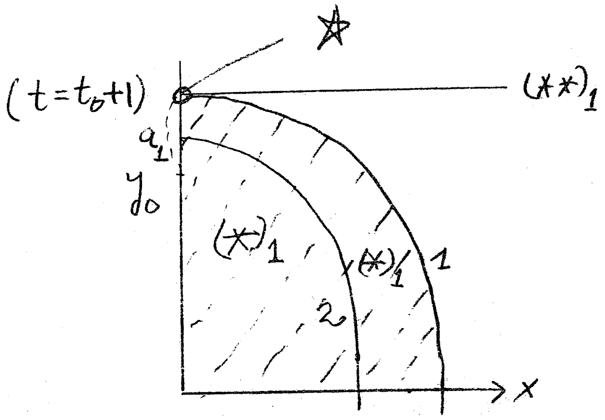
[補題 2] より

$$(*)_1\ a.s.s.\left(\sum_{q=1,2} U_{2,q}\right) \subseteqq C_2 + C_{a_1}.$$

一方 $(**)_1$ の propagation speed は $\sqrt{a_1}$，なぜならば，$\lambda_q^+(\tau^2(\lambda_0, \sigma_0), \sigma_0) = 0$ $(q = 1)$ 従って

$$\tau^2(\lambda_0\ \sigma_0) = \sqrt{a_1}\,|\sigma_0|.$$





依って $U_{2,1}+U_{2,2}$ よりは $x=0$ で半直線

$$t\tau^2(\lambda_0,\sigma_0)+y\sigma_0-s\lambda_0=0,\quad t\geq t_0.$$

依って Euler 公式より ☆: $t>t_0$, $(t-t_0)\tau^2(\lambda_0,\sigma_0)+(y-y_0)\sigma_0=0$, $x=0$ 上にもsingularity があり得る。

$(t_0=\tau^2_{(\lambda)}(\lambda_0,\sigma_0)^{-1}s,\ \ y=-\tau^2_{(\lambda)}(\lambda_0,\sigma_0)^{-1}\tau^2_{(\sigma)}(\lambda_0,\sigma_0)s)$。

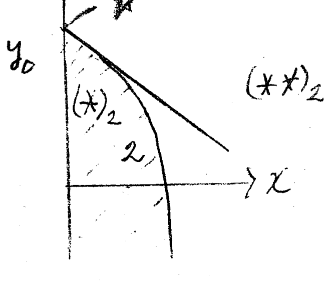
次に $U_{2,2}$ であるが、$(**)_1\wedge(**)_2\subseteq\{x=0\}$ と上述のことより、
$\forall\delta>0$ (十分小),

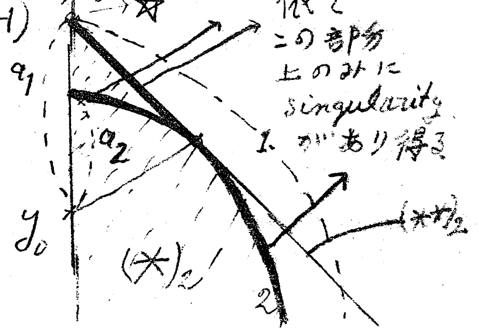
$$\begin{cases} P_2U_{22}=0, & (x>0),\\ \text{a.s.s. } B_j(U_{22})\subset N_{\delta'}(C_2\cup ☆), & \overset{(x=0)}{(x=\delta)},\ (j=1,2,\cdots,m),\\ \text{a.s.s. } U_{22}=\phi & (t<0,\ |t|<\varepsilon). \end{cases}$$

依って $(*)_2$: a.s.s. $U_{22}\subseteq N_{\delta'}(C_2\cup ☆)+C_{a_2}$, $(x\geq\delta)$, $\delta'=(a_1\cdot(a_1-a_2)^{-1})^{\frac{1}{2}}\cdot\delta$.

一方 $(**)_2$: $(t-t_0)\tau_2(\lambda_0,\sigma_0)+x\lambda_2^{+}(\tau_2(\lambda_0,\sigma_0),\sigma_0)+(y-y_0)\sigma_0=0$ 上にも U_{22} の singularity はあり得る.

$(t=t_0)$ ([補題6]). $(t=t_0+1)$





この様な singularity は $\Delta(\tau_0, \sigma_0)$ の中に $\lambda_1^{\pm}(\tau_0, \sigma_0)$ が入っており，ここで $\Delta(\tau, \sigma)^{-1} \cdot \Delta_g(\tau, \sigma, \lambda)$ を τ や σ に関して微分出来ない事に起因している：以上見た様に $\Delta(\tau_0, \sigma_0) = 0$ は本質でない．

δ)　ここで singularity を外部より見て，regular な範囲を拡大して，それからの位置を定めた．ここに出て来る singularity の位置は P にのみ依存している．そして免角 bicharacteristic lines により定められる．P は real 係数だから P^*（formal）についても全く同じ（但し進行方向は逆向き）bicharacteristic lines を得るから，ここでの主張は示されたことになる．但し入射，反射波だけでなく常に $x = 0$ にそった singularity より出るそれも考えねばならぬ。又 $(P, (1, \frac{\partial^2}{\partial x^2}))$ の様に，より広い位置で regular になることもある事に注意．尚 §0 で記した様に一般化も regularity の位置を定めるという事になれば（#）条件があれば困難は大きなものでないであろう，ここで説明した方法は有効であろうと考える，更に証明の中で適当に積分の中に任意の order の polynomial $Q(\tau, \lambda, \sigma)$ を乗じておく必要があったが，省略した。又方程式系についても全く同様な取扱いが出来るが，記述上の複雑化が目立つので単独方程式に限った。

γ) [Remark 1]. P17 上より6行目以下で補題3〜5. を要したが，実は Hörmander の WF を用いれば，これは不用となり，補題6は $a_2 \to a_1$ の場合にのみ用いればよい．WF の用い方を例示すれば，

(a.) $S.S.(u_{22}) \cap (**)_2 \cap \{t \geq t_0, x > 0\}$

$\subset$ {オ1 の反射波 $\cap (**)_2\} \cup$ ☆ を含む convex set.

一方 $P_2(u_{2,2}) = 0$ より上式左辺上の点 X に関して，$WF(u_{2,2}) \ni (X, \xi) \to \xi \in P_2$ の normal cone, かつ (X, ξ) より出発する P_2 の bicharacteristic line $\in (**)_2$．依って ξ は $(t_0, 0, y_0)$ より出発するオ2の反射波を定義する初期 data でなければならぬ．依て u_{22} の singularity は {オ2の反射波 $\cap (**)_2\} \cup$ ☆ を含む convex set 上にあり得る．

[Remark 2]. 上の注意より P に#條件があれば一般論が，ここでの主題について得られることは殆んど明らかになった．補題3〜5は不用になったが，L^2-well posedness の代数幾何学的特長付けのために必要であろう．

Bibliography

[1] L. Hörmander, Fourier integral operator I, II, (1971) (1972).

[2] L. Hörmander, Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equation with analytic coefficients, (1972), Comm. Pure. and Apple.

[3] V. P. Maslov, The theory of perturbotions and asymptotic method, (1965).

[4] C. S. Morawetz and D. Ludwig, The generalized huygen's principle for reflecting bodies, (1969), Comm. Pure and Apple.

[5] T. Shirota, 双曲型方程式の混合問題について。 数学 24 (1972).

[6] T. Shirota, On the propagation speed of hyperbolic operator with mixed boundary conditions, J. F. S. Hokkaido Univ. 22 (1972).

講究録 No.161 追加　　P.124 bis

「Remark」説明の便宜上. P.8 及び P.13 等で Residue を利用したが. それでは証明にならない. 証明には, この様にする必要なく. complex phase function が考えられているとして. 直接夫々必要な結論に達する。

特に Residue を使用し. 補正函数を見易い型にしたいときには $d\tau d\sigma$ に関する積分に変型する方が適当であり. この様にすると. 例えば #条件, normal surface についての条件を附加して §0, β) の結論は一般にそのまま拡張される.

何れにしても、変数係数の場合にこの問題を考えることは、現在多くの人々の関心事ではあるが. $\lambda^{\pm}_{g}(t,\sigma)$ の複雑性を克服し得る理論は未建設である。