数理解析研究所講究録
161巻 1972年 49-61

$(m^2I-\Delta)^\lambda$ の anti-locality について.

村田 実(都立大・理)
増田久弥(東大・理)

量子場の作用素によって生成された作用素環に関する問題との関連で、H. Reeh と S. Schlieder は、[3] の中で、$(m^2I-\Delta)^{1/2}$ は、anti-local であることを示した。anti-local とは、ある $\mathbb{R}^N$ の中の開集合 U があって、$f(x) = (m^2I-\Delta)^{1/2}f(x) = 0$ $(\forall x \in U)$ をみたす $L^2(\mathbb{R}^N)$ 函数は、恒等的にゼロなるものにかぎるという。その後、I. Segal と R. Goodman [4] は、空間次元 N が奇数のとき、$(m^2I-\Delta)^\lambda$ (λ;非整数) がやはり anti-local であることを示した。最近講演者の一人(村田)が、奇数次元という条件をのぞいた。このレポートは、2つから成る。

[I] $(m^2I-\Delta)^{1/2}$ が anti-locality をもつことの簡単な証明を与える

[2°] $(m^2 I - \Delta)^\lambda$ が anti-locality をもつこと
の証明。

§1. 楕円型作用素の $\frac{1}{2}$ ベキの anti-locality.

Ω; $\mathbb{R}^N$ の中のなめらかな境界をもつ領域
とし、$L^2(\Omega)$ の中の作用素 A を次の如く定める。

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in H^2(\Omega);\ u = 0\ (\Omega \text{の境界上})\}$$
$$Au = \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + a(x)u$$

($H^2(\Omega)$; ソボレフ空間). ここで、係数に関して次の
仮定をおく.

(H-1) $a_{jk}(x)$ は、$\bar{\Omega}$ 上で一様有界且1階連続的微分可能な実数値函数; $a(x)$ は、$\bar{\Omega}$ 上一様有界且連続な実数値函数.

(H-2)
$$\sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq \delta|\xi|^2 \quad (\delta > 0)$$
$$x \in \Omega,\quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$
$$a(x) \leq 0. \quad (x \in \Omega)$$

この時、次の定理が成立.

<u>定理</u>. $(-A)^{1/2}$ は anti-local な性質をもつ。$(-A)^{1/2}$ は，自己共役作用素 $-A$ のスペクトル表示によって定義される。

<u>証明</u>. $-A$ は，明らかに，下に有界な自己共役作用素より，

$$U(t) = e^{it(-A)^{1/2}} \quad -\infty < t < \infty$$

は，$L^2(\Omega)$ の中の有界作用素の 1-パラメーター群をなす。

$$u(x,t) = (U(t)f)(x) \qquad (x \in \Omega)$$

は，次の性質をもつ。

(i) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au$$

i.e.,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + a(x)u$$

(ii) $$u(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = i\left((-A)^{1/2}f\right)(x)$$

仮定する．

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad (x \in U)$$

であり、且 u は、波動方程式の解より、

$\exists t_0>0$, $\exists U_0$ (Uの開部分集合);

$$u(x,t)=0 \qquad 0<t<t_0,\ x\in U_0.$$

よって、$\forall \varphi \in C_0^\infty(U_0)$ に対して、

$$(u(\cdot,t),\varphi)_{L^2}=0 \qquad 0<t<t_0.$$

故に、

$$F(z)=\left(\exp(iz(-A)^{1/2})f,\varphi\right)_{L^2} \qquad \mathrm{Im}\, z>0$$

は、次の性質をもつ

(i) $F(z)$ は、$\mathrm{Im}\, z>0$ で正則、$\mathrm{Im}\, z\geq 0$ で連続.

(ii) $F(t)=(u(\cdot,t),\varphi)_{L^2}$

(iii) $F(t)=0 \qquad 0<t<t_0.$

よって、Schwartz の鏡像定理より、$F(z)$ は、$(0,t_0)$ を通って、下半面に正則に延長される。(iii) より

$$F(z)=0 \qquad (\mathrm{Im}\, z\geq 0)$$

特に、

$$F(t)=(u(\cdot,t),\varphi)_{L^2}=0 \qquad -\infty<t<\infty.$$

よって. $\varphi \in C_0^\infty$ は任意より

$$u(x,t)=0, \quad x \in U_0, \; -\infty < t < \infty,$$

解の一意接続定理より,（[1]）

$$u(x,t)=0 \quad x \in \Omega, \; -\infty < t < \infty$$

時に,

$$u(x,0) = f(x) = 0 \quad x \in \Omega.$$

これは, 定理を証明している。

§2. ラプラス作用素のある種の関数の局所性.

$h \in C^\infty([0,\infty))$ を, その任意の導関数が多項式増大度をもつ様な関数とし, $\mathcal{S}(E_n)$ における作用素 $h(-\Delta)$ を,

$$h(-\Delta) f = \mathcal{F}^{-1}\left(h(|\xi|^2) \hat{f}(\xi) \right), \quad f \in \mathcal{S}(E_n)$$

によって定義する.

そのとき, 次の定理が成立する.

定理. 仮定：$g(t)=h(t^2)$とおいたとき. $g(t)$ が次の性質 (i)〜(iii) をもつ。

(i) $g(t)$ はある $R>0$ に対して $(-\infty,-R)\cup(R,\infty)$ で実解析的であり. しかも. $g|_{(R,\infty)}$ と $g|_{(-\infty,-R)}$ はそれぞれ.

$$\mathbb{C}\setminus(-\infty,-R]\cup\{t\ ;\ |t|\leqq R\}$$
$$\mathbb{C}\setminus[R,\infty)\cup\{t\ ;\ |t|\leqq R\}$$

に解析接続される。その関数をそれぞれ. $g_1(t)$, $g_2(t)$ と表わす。

(ii) $\exists C, \exists N$ s.t. $|g_j(t)|\leqq C(1+|t|)^N$, $j=1.2$

for $\forall |t|\geqq R$ and $\mathrm{Im}\,t\neq 0$.

(iii) $g_2(t)-g_1(t)\not\equiv 0$. in $\{t\ ;\ \mathrm{Im}\,t<-R\}$ and $\{t\ ;\ \mathrm{Im}\,t>R\}$

結論：$h(-\Delta)$ は反局所性をもつ。即ち. ある空でない開集合 U があって. $f|_U = h(-\Delta)f|_U=0$ ならば $f=0$.

証明. $n=1$ の場合. f と $Hf\ (\equiv h(-\frac{d^2}{dx^2})f)$ が $(-\delta,\delta)$ で消えれば. $f=0$. を示せばよい。

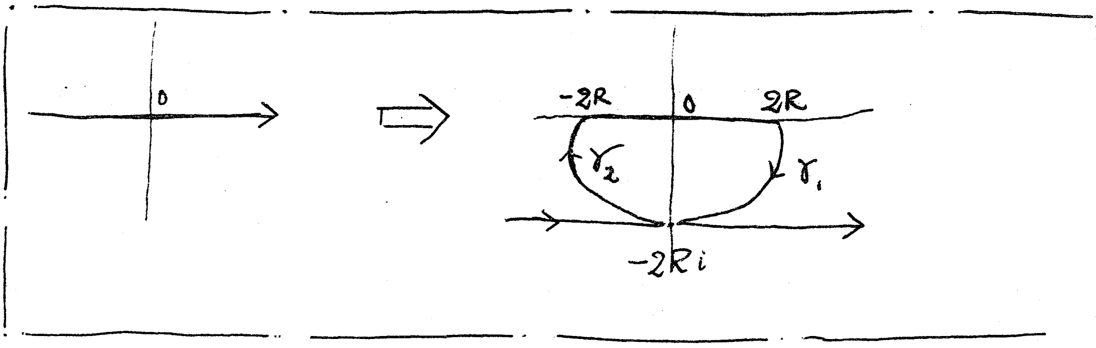
$f_\pm(x) = Y(\pm x) f(x)$ とおく ここで $Y(x)$ は Heaviside の関数。我々は、まず次のことを要請する。

$$Hf_+(x) = e^{2xR}\frac{1}{2\pi i}\int_\delta^\infty (D_x - i)^k\left(\frac{1}{x-y}\right)\cdot g_+(y)\,dy \qquad (*)$$
$$+ F_+(x) \qquad \text{in } (-\infty, \delta)$$

ここで $g_+(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}\left((\xi-i)^{-k}(g_2-g_1)(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi-2Ri)\right)$ は L^2-関数で、$F_+(x)$ は entire function.

積分路をかえることにより、

$$Hf_+(x) = \int_{-\infty}^\infty h(\xi^2)\hat{f}_+(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi$$
$$= e^{2xR}\int_{-\infty}^0 g_2(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi$$
$$+\int_\gamma g^\gamma(\xi)\hat{f}_+(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi$$
$$+ e^{2xR}\int_0^\infty g_1(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$$



ここで
$$g^\gamma(\xi) = \begin{cases} g_2(\xi) & \text{on } \gamma_2 \\ g(\xi) & \text{on } [-2R, 2R] \\ g_1(\xi) & \text{on } \gamma_1 \end{cases}$$

$$\gamma = \gamma_2 + [-2R, 2R] + \gamma_1$$

$F_+(x) \equiv \int_\gamma g(\xi)\hat{f}_+(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ は entire function であるから、第一項と第三項を問題にすればよい。

Supp $f_+ \subset [\delta, \infty)$ 故 $e^{i\delta\xi}\hat{f}_+(\xi)$ は下半平面で正則かつ polynomial growth at infinity である。従って、適当な自然数 k に対して、

$$\psi_j(\xi) \equiv e^{i\delta\xi}(\xi-i)^{-k}g_j(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi-2Ri), \quad (j=1,2)$$

は Hardy class に属する。

従って、
$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{-1}\left((\xi-i)^{-k}g_j(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi-2Ri)\right)(x)\\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\delta\xi}\psi_j(\xi)\right)(x)\\
&= \mathcal{F}^{-1}(\psi_j)(x-\delta)
\end{aligned}$$

が $(-\infty, \delta)$ で vanish することに注意すれば、

$(-\infty, \delta)$ において、

$$\begin{aligned}
&e^{2xR}\mathcal{F}^{-1}\left(Y(\xi)g_1(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi-2Ri)\right)\\
&+ e^{2xR}\mathcal{F}^{-1}\left(Y(-\xi)g_2(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi-2Ri)\right)\\
&= e^{2xR}(D_x-i)^k\Big\{\mathcal{F}^{-1}\left((\xi-i)^{-k}g_1(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi-2Ri)\right)\\
&\qquad + \mathcal{F}^{-1}\left(Y(-\xi)(\xi-i)^{-k}(g_2-g_1)(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi-2Ri)\right)\Big\}\\
&= e^{2xR}(D_x-i)^k\left\{\mathcal{F}^{-1}(Y(-\xi)) * \mathcal{F}^{-1}\left((\xi-i)^{-k}(g_2-g_1)(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi-2Ri)\right)\right\}\\
&= e^{2xR}\frac{1}{2\pi i}\int_\delta^\infty (D_x-i)^k\left(\frac{1}{x-y}\right)g_+(y)\,dy
\end{aligned}$$

これで、(*) が証明された。

同様にして

$$Hf_-(x) = e^{-2xR}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-\delta}(D_x+i)^k\left(\frac{1}{x-y}\right)g_-(y)\,dy$$

$$+F_-(x), \qquad \text{in } (-\delta,\infty)$$

ここで $g_-(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}\left((\xi+i)^{-k}(q_2-q_1)(\xi+2Ri)\hat{f}_-(\xi+2Ri)\right)$

は L^2-関数で $F_-(x)$ は entire function.

従って、$(-\delta,\delta)$ において

$$Hf(x) = e^{2xR}G_+(x) + e^{-2xR}G_-(x) + F_+(x) + F_-(x)$$

ここで $G_\pm(x) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(D_x\mp i)^k\left(\frac{1}{x-y}\right)g_\pm(y)\,dy$

(Supp $g_+ \subset [\delta,\infty)$, Supp $g_- \subset (-\infty,-\delta]$
に注意せよ。)

仮定より $Hf(x) = 0$ in $(-\delta,\delta)$

であるから $G_\pm(x)$ はそれぞれ全平面 $\mathbb{C}$ に解析接続される。従って

$$0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\{G_+(x-i\varepsilon) - G_+(x+i\varepsilon)\} = (D-i)^k g_+(x)$$

$$\text{in } \mathcal{S}'(E_1).$$

$$0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\{G_-(x-i\varepsilon) - G_-(x-i\varepsilon)\} = (D+i)^k g_-(x)$$

$$\text{in } \mathcal{S}'(E_1).$$

Fourier 変換することにより

$$(q_2-q_1)(\xi-2Ri)\hat{f}_+(\xi-2Ri)=0, \quad {}^\forall \xi\in E_1^*$$
$$(q_2-q_1)(\xi+2Ri)\hat{f}_-(\xi+2Ri)=0, \quad {}^\forall \xi\in E_1^*$$

故に $f=0$.　　q.e.d.

次に一般の場合を証明する。そのために E_j の上の Laplace 作用素に対して $H_j=h(-\Delta)$ on $\mathcal{S}'(E_j)$ とおく。$\mathcal{S}'(E_j)$ の上の Fourier 変換を $\mathcal{F}_j$ と表示する。

$n=$奇数の場合. H_n が convolution と可換であるから C^∞-関数に対して証明すればよいことをまず注意しよう。

球対称な関数に対して H_n の反局所性を示すために次の Lemma をつかう.

Lemma. (Segal-Goodman [4] lemma 3)
$f\in C^\infty(E_n)\cap\mathcal{S}'(E_n)$ を原点の近傍で vanish する関数とする。この様な関数 f に対して作用素 D を

$$Df=\mathcal{F}_1^{-1}\circ|\xi|^{n-2}\circ\mathcal{F}_n f$$

と定義する。このとき、もし $n=2k+1$ ならば、次の性質 1), 2), 3) が成立する.

1) ${}^\exists C_{\alpha\beta}$ s.t. $Df=\sum_{\substack{\alpha\leq k\\ \beta\leq k-1}} C_{\alpha\beta}\, r^\alpha\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial r}\right)^\beta f$

2) $H_1 Df = D H_n f$

3) $Df = 0$ ならば $f = 0$.

このLemmaから f と $H_n f$ が原点の近傍でvanishするならば, Df と $H_1(Df) = D(H_n f)$ が原点の近傍でvanishする。H_1 は反有性をもつから $Df = 0$, 従って $f = 0$ が従う。

球対称な場合へのreductionについては, Segal-Goodman [4] をみられたい。

n=偶数の場合. まず次の等式:

$$H_{n+1}(f \otimes 1) = H_n f \otimes 1 \qquad {}^\forall f \in \mathcal{S}'(E_n)$$

を示そう。実際, $\hat{f}$ がcompact supportならば,

$$\begin{aligned} H_{n+1}(f\otimes 1) &= \mathcal{F}^{-1}\left(h(|\xi|^2 + \xi_{n+1}^2)\cdot \hat{f}(\xi) \otimes 2\pi\delta(\xi_{n+1})\right) \\ &= \left\langle \hat{f}(\xi)\otimes 2\pi\delta(\xi_{n+1}),\ h(|\xi|^2+\xi_{n+1}^2)(2\pi)^{-n-1} e^{ix\cdot\xi} \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{f}(\xi),\ h(|\xi|^2)\cdot(2\pi)^{-n} e^{ix\cdot\xi} \right\rangle \\ &= \mathcal{F}_n^{-1}\left(h(|\xi|^2)\hat{f}(\xi)\right) \\ &= H_n f \otimes 1 \end{aligned}$$

$\hat{f}$ がcompact supportでないときは等式の $\mathcal{S}'$ における連続性による。

さて f と $H_n f$ が原点の近傍で vanish すると仮定しよう。その時、$F \equiv f \otimes 1$ と $H_n F = H_n f \otimes 1$ もやはり原点の近傍で vanish するから、H_{n+1} の反局所性により、$F = 0$。従って $f = 0$。 q.e.d.

（証明おわり）

次に定理の応用として反局所性をもつ作用素の例をいくつかあげよう。

例1. $(m^2 I - \Delta)^\lambda$ （λ : non-integral number）

例2. $p(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_m$ を、次の性質

$$-\pi < \arg p(t) < \pi, \quad p(t) \neq 0, \quad {}^\forall t \geq 0$$

をもつ複素係数多項式とする。このとき、

$$\left(a_0(-\Delta)^m + a_1(-\Delta)^{m-1} + \cdots + a_m\right)^\lambda \quad (m\lambda \notin \mathbb{Z})$$

は $\mathcal{S}(E_n)$ で反局所性をもつ。

例3. $p(t)$ を上に述べた多項式として、$\mathrm{Log}\,(a_0(-\Delta)^m + \cdots + a_m)$ は $\mathcal{S}(E_n)$ で反局所性をもつ。

例4. $(-\Delta)^{\lambda}$ $(\lambda \notin \mathbb{Z}, \ \mathrm{Re}\,\lambda \geqq \frac{1}{2})$

は $L^2(E_n)$ で反局所性をもつ。(証明は全く同様にしてできる。)

従って Riesz 変換 $Rf = (R_1 f, \cdots, R_n f)$ も $L^2(E_n)$ で反局所性をもつ。

$\left(\sum_{j=1}^{n} D_j R_j = (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \right.$ に注意せよ。$\left. \right)$

文献

[1] Masuda, K. A unique continuation theorem for solutions of wave equations with variable coefficients. J. Math. Anal. Appl., 21 (1968) 369–376

[2] Murata, M., to appear

[3] Reeh, H. and Schlieder, S.; Bemerkungen zur Unitaräquivalenz von Lorentzinvarianten Feldern. Nuovo Cimento. 22 (1961) 1051–1068

[4] Segal, I., Goodman R., Anti-locality of certain Lorentz invariant operators. J. Math. Mech., 14 (1965) 629–638.