数理解析研究所講究録
162巻 1972年 82-96

Prolongement et existence des solutions des systèmes hyperboliques non-stricts à coefficients analytiques

par Jean-Michel Bony et Pierre Schapira.

Ce texte est la première rédaction d'un article plus détaillé (et sans doute plus complet) à paraître prochainement. Il ne doit donc pas être considéré comme définitif.

Introduction

Nous étudions sous quelles conditions les solutions analytiques ou les solutions hyperfonctions u d'un système d'équations aux dérivées partielles $P_i u = v_i$ se prolongent à travers la frontière d'un ouvert Ω, de classe C^1 ou convexe. Nous introduisons pour cela une notion d' "hyperbolicité", ne portant que sur la partie principale des opérateurs, et vérifiée par exemple par les opérateurs hyperboliques dont les caractéristiques sont de multiplicité constante, ou par les systèmes holomorphes (dans les directions non caractéristiques).

Les méthodes utilisées sont "géométriques" et permettent d'obtenir aussi des théorèmes d'existence (et d'unicité). Par exemple si S est une hypersurface analytique réelle (resp. complexe) de normale "hyperbolique" (resp. non caractéristique) pour un opérateur P on montre que S admet un système fondamental de voisinages dans lesquels on peut résoudre le problème de Cauchy pour les fonctions analytiques (resp. holomorphes) et même pour les hyperfonctions (ce qui a un sens grâce à la théorie du faisceau $\mathcal{C}$ de M. Sato (10)).

Le prolongement des solutions d'une équation à coefficients constants a été étudié par C.O. Kiselman (8) par une méthode entièrement différente.

L'étude des opérateurs hyperboliques de type principaux, dans le cadre des hyperfonctions, a été faite récemment par T. Kawaï (6,7)

Une partie des résultats exposés ici ont été annoncés dans (2, 3, 4)

I. SOLUTIONS HOLOMORPHES

Dans ce paragraphe $P_i(z, \frac{\partial}{\partial z})$ désignera une famille finie d'opérateurs différentiels à coefficients holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$.

On identifiera $\mathbb{C}^n$ pour le produit hermitien $\langle z, \zeta \rangle = \sum_i z_i \overline{\zeta}_i$ à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$ muni du produit scalaire $\mathrm{Re} \langle z, \zeta \rangle$. Le mot hyperplan signifiera, ... /

/

sauf mention du contraire, hyperplan réel de $\mathbb{R}^{2n}$.

Un hyperplan d'équation $\mathrm{Re} < z - z_o , \zeta > = 0$ sera caractéristique en z_o par rapport à la famille (P_i) si on a pour tout i $p_i(z_o , \zeta) = 0$ où p_i désigne le symbole principal de P_i, défini sur $U \times \mathbb{C}^n$. On dira aussi que c'est le vecteur ζ qui est caractéristique.

a) Théorème de prolongement

Le théorème suivant est fondamental dans cette étude. Il a été démontré par M. Zerner.

Théorème 1.1.(12)

Soit Ω un ouvert de U dont la frontière $\partial\Omega$ est de classe C^1 en un point z_o. Supposons que la normale N à Ω en z_o soit non caractéristique. Alors si f est holomorphe dans Ω et $P_i f$ est holomorphe dans un voisinage de z_o, f se prolonge en fonction holomorphe au voisinage de z_o.

Démonstration

On peut évidemment supposer la famille réduite à un seul opérateur P.

Soit H_ε l'hyperplan d'équation $\mathrm{Re} < z - z_o , N > = -\varepsilon$. L'intersection de H_ε et de Ω contient une boule (dans H_ε) B_a centrée au point $z_o + \varepsilon N$ et dont le rayon a est infiniment grand par rapport à ε lorsque ε tend vers 0.

D'après le théorème de Cauchy-Kowalevski "précisé" (5) il existe un nombre positif δ indépendant de a et de ε tel que si f est holomorphe au voisinage de $\overline{B_a}$, f se prolonge holomorphiquement dans le cône ouvert (tronqué) de base B_a et de hauteur δ_a. Ce cône sera un voisinage de z_o pour ε assez petit.

Nous allons "globaliser" ce théorème en adaptant une méthode dûe à L. Hörmander ((5) théorème 5.3.3.). Pour cela si A est une partie de la sphère S^m de $\mathbb{R}^m$ (ici $m = 2n$), et L une partie de $\mathbb{R}^m$ on appellera "domaine d'influence" de L relativement à A, l'intérieur de l'intersection des demi-espaces de normale appartenant à A, contenant L.

Théorème 1.2.

Soit ω et Ω deux convexes de U, ω étant localement compact, Ω ouvert, avec $\omega \subset \Omega$. Considérons les hyperplans dont la normale N est limite de directions caractéristiques en (au moins) un point de Ω, et supposons que tout hyperplan de ce type qui coupe Ω coupe ω. Alors si f est une fonction holomorphe au voisinage de ω et si $P_i f$ est holomorphe dans Ω, f se prolonge en fonction holomorphe dans Ω.

... /

Démonstration

Soit A l'adhérence dans S^{2n-1} des directions caractéristiques dans Ω. Soit z_o appartenant à ω, $\tilde{\omega}$ un voisinage ouvert de ω dans lequel f est holomorphe, z_1 un point de Ω et $\eta > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B(z_1, \eta)}$ de centre z_1 de rayon η soit contenue dans Ω. Il existe un compact K de ω tel que tout hyperplan de normale appartenant à A qui coupe $B(z_1, \eta)$ coupe K.

Soit ω' un voisinage convexe de K ouvert et relativement compact dans ω, soit $0 < \varepsilon < \eta$ tel que ω'_ε (ensemble des points à la distance inférieure à ε de ω') soit contenu dans $\tilde{\omega}$.

Soit $0 \leq t \leq 1$, $z_t = z_o + t(z_1 - z_o)$, K_t l'enveloppe convexe de ω'_ε et de $B(z_t, \varepsilon)$. La frontière de K_t est de classe C^1 et ses normales en un point hors de $\tilde{\omega}$ n'appartiennent pas à A. Il résulte alors du théorème 1.1. que le plus petit t_o tel que f ne se prolonge pas à K_t pour $t > t_o$, est 1.

Pour tout $z \in \Omega$ on a donc obtenu un prolongement holomorphe de f dans un ouvert étoilé en z_o contenant z_1, ce qui définit un prolongement de f à Ω.

Corollaire

Soit Ω un ouvert convexe de U avec $\overline{\Omega} \subset U$. Soit z_o appartenant à $\partial\Omega$ et supposons qu'aucun hyperplan d'appui à $\overline{\Omega}$ en z_o ne soit caractéristique pour le système P_i. Il existe alors un voisinage V de z_o dans U, tel que si f est holomorphe dans Ω, et $P_i f$ est holomorphe dans $\Omega \cup V$, f est holomorphe dans $\Omega \cup V$.

Démonstration

Soit Γ le cône convexe fermé des normales à $\overline{\Omega}$ en z_o. On peut trouver un voisinage borné W de z_o et un cône convexe $\tilde{\Gamma}$ voisinage de $\Gamma - \{0\}$ tel que pour tout z dans $\overline{W}$ et ζ dans $\tilde{\Gamma}$ on ait $p_i(z, \zeta) \neq 0$ pour un i.

Soit C le cône de sommet z_o, polaire de $\tilde{\Gamma}$, N un vecteur de $\Gamma - \{0\}$, et H_ε l'hyperplan d'équation $\mathrm{Re} < z - z_o, N > = -\varepsilon$. L'intersection de C et de H_ε est une base compacte de C et est contenue dans $\Omega \cap W$ pour ε assez petit.

Soit A l'ensemble (fermé) des $\zeta \in S^{2n-1}$ tel que $p_i(z, \zeta) = 0$ $\forall i$ pour un z appartenant à $\overline{W}$. Si $\zeta \in A$, l'hyperplan $\mathrm{Re} < z - z_o, \zeta > = 0$ rencontre $C \cap H_\varepsilon$ pour tout ε, donc rencontre $\Omega \cap W \cap H_\varepsilon$ suivant une partie compacte indépendante de ζ, ce qui montre que le domaine d'influence relativement à A de $\Omega \cap W \cap H_\varepsilon$ est un voisinage de z_o pour ε assez petit.

... /

b) Théorèmes d'existence

Théorème 1.3. (1)

Soit $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients holomorphes dans U, S une hypersurface complexe de U non caractéristique pour P. Il existe un système fondamental de voisinages V de S dans lesquels le problème de Cauchy $Pf = g, \gamma(f) = (h)$ a une solution f et une seule, holomorphe dans V, pour g holomorphe dans V et (h) m-uple de fonctions holomorphes dans S.

Démonstration

D'après l'unicité au problème de Cauchy on est ramené à démontrer le théorème pour un ouvert convexe relativement compact d'un hyperplan complexe, et c'est alors une conséquence triviale du théorème de Cauchy-Kowalevski et du théorème 1.2.

Théorème 1.4.

Soit $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ un opérateur différentiel sur U. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$ avec $\bar{\Omega} \subset U$, et soit z_o appartenant à $\partial\Omega$. Supposons qu'il existe une normale N à $\bar{\Omega}$ en z_o, un voisinage X convexe fermé $\mathbb{C}$-équilibré de 0 dans $\mathbb{C}^n$($\zeta \in X \Longrightarrow \rho\zeta \in X$, $\rho \in \mathbb{C}, |\rho| \leq 1$) tel que si ζ appartient à X, $N+\zeta$ soit non caractéristique pour P et tel que toutes les normales à $\bar{\Omega}$ en z_o appartiennent à $N+X$. Alors z_o admet un système fondamental de voisinages convexes V tels que si g est holomorphe dans $\Omega \cap V$ il existe f holomorphe dans $\Omega \cap V$ solution de $Pf = g$.

Ce théorème s'applique évidemment si N est l'unique normale à $\bar{\Omega}$ en z_o.

Démonstration

Soit W un voisinage borné de z_o tel que en tout point de $\bar{W}$ les vecteurs de $N+X$ soient non caractéristiques. Soit $\tilde{H}_\varepsilon$ l'hyperplan complexe d'équation $\langle z - z_o, N\rangle = -\varepsilon$, C le cône de sommet z_o polaire de $N+X$ et soit enfin A l'ensemble des directions caractéristiques en un point de $\bar{W}$.

Si $\zeta \in A$ l'hyperplan d'équation $\mathrm{Re}(z - z_o, \zeta) = 0$ rencontre $C \cap \tilde{H}_\varepsilon$ car sinon cela signifierait que $\zeta \pm iN$ appartient au cône engendré par $N+X$ ce qui contredit le fait que X est équilibré et $\zeta \notin N+X$

Comme $C \cap \tilde{H}_\varepsilon$ est une partie convexe compacte de $\Omega \cap W$ pour ε assez petit, le domaine d'influence de $\Omega \cap W \cap \tilde{H}_\varepsilon$ relativement à A sera un voisinage de z_o pour ε assez petit.

(1) Ce théorème vient d'être démontré indépendemment par C. Wagschal qui utilise la méthode des séries majorantes.

Il suffit alors de prendre pour V l'enveloppe convexe d'un voisinage de z_o et d'un voisinage de $\Omega \cap W \cap \breve{H}_\varepsilon$ suffisamment petits pour être dans ce domaine d'influence.

On résoud ensuite le problème de Cauchy $Pf = g$, $\gamma(f) = 0$, au voisinage de $\Omega \cap W \cap \tilde{H}_\varepsilon$ et le théorème 1.2. permet de prolonger f à $\Omega \cap V$.

II. SOLUTIONS ANALYTIQUES

Dans ce paragraphe $P_i(x, \frac{\partial}{\partial x})$ désignera une famille finie d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et se prolongeant en fonctions holomorphes dans un voisinage $\tilde{U}$ de U dans $\mathbb{C}^n$.

Nous poserons $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ et, identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, on désignera par $\zeta' = \xi' + i\eta'$ (resp. $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$) la première (resp. la deuxième) projection de ζ.

a) Hypothèses d'hyperbolicité

Nous serons amenés à faire les hypothèses d'" hyperbolicité " suivantes.

$H_1(x_o, N)$: le vecteur N de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est non caractéristique en x_o et les racines τ communes aux polynômes $p_i(x, \xi + \tau N)$ sont réelles pour x réel et ξ réel.

$H_2(x_o, N)$: le vecteur N de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est non caractéristique en x_o et si l'on suppose les coordonnées choisies telles que $N = (0, \dots, 0, 1)$, il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $C > 0$ telles que les racines communes aux polynômes $p_i(z, \zeta' + \tau N) = 0$ vérifient

$$|\operatorname{Im} \tau| \leq C[|\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Im} \zeta'|]$$

pour $|\operatorname{Re} \zeta'| = 1$, $|\operatorname{Im} \zeta'| < \alpha$, $|z - x_o| < \alpha$.

Remarque 2.1.

Sous l'hypothèse $H_2(x_o, N)$ il existe α' et C' tels que pour $|z - x_o| < \alpha'$ et pour ζ appartenant à $\mathbb{C}^n$ on ait

$$|\operatorname{Im} \tau| \leq C'[|\xi'| \, |y| + |\eta|]$$

si $p_i(z, \zeta + \tau N) = 0$ quelque soit i.

En effet cette inégalité ne déduit par homogénéité de la précédente si $|\eta'| \leq \alpha |\xi'|$. D'autre part N étant non caractéristique pour l'un des P_i au voisinage de x_o, on a une majoration $|\tau + \zeta_n| \leq C''|\zeta'|$ et donc $|\operatorname{Im} \tau| \leq C''[|\zeta'| + |\eta_n|]$ ce qui entraîne $|\operatorname{Im} \tau| \leq C'''|\eta|$ pour $|\eta'| \geq \alpha |\xi'|$.

... /

Remarque 2.2.

L'hypothèse $H_2(x_o, N)$ entraîne $H_2(x, N')$ pour N' voisin de N et x voisin de x_o.

b) discussion de l'hypothèse H_2

Les hypothèses faites ne portent que sur les parties principales des opérateurs. Signalons deux situations très différentes où l'hypothèse H_2 est vérifiée.

Théorème 2.1.

Soit P un opérateur différentiel à coefficients analytiques dont la partie principale est hyperbolique dans la direction N au voisinage de x_o. Si les racines en τ de $p(x, \xi + \tau N)$ ont une multiplicité constante pour x voisin de x_o et $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, l'opérateur P vérifie l'hypothèse $H_2(x_o, N)$. Il en est de même si la partie principale de P est un produit de tels opérateurs.

(cf (9) pour une hypothèse un peu plus forte).

En effet le polynôme $p(x, \xi + \tau N)$ se décompose sous la forme $p(N) \prod (\tau - \tau_i(x, \xi))^{\alpha_i}$ au voisinage de chaque point (x_o, ξ_o), les τ_i étant des fonctions analytiques à valeurs réelles. Les fonctions τ_i se prolongent en fonctions holomorphes de (z, ζ) réelles pour (z, ζ) réel et donc vérifiant $|\mathrm{Im}\, \tau_i| \leq C[|\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, \zeta|]$. D'autre part on a toujours $p(z, \zeta + \tau N) = p(N) \prod(\tau - \tau_i(z, \zeta))^{\alpha_i}$ d'où $H_2(x_o, N)$.

La proposition peut être généralisée à un système d'opérateurs (P_i) dont les parties principales sont à coefficients réels. Dans ce cas l'hypothèse $H_1(x_o, N)$ entraîne $H_2(x_o, N)$ si de plus pour chaque racine commune τ à $p_i(x_o, \xi_o + \tau N) = 0$, la racine τ a une multiplicité constante pour l'un au moins des $p_i(x, \xi + \tau N)$ au voisinage de (x_o, ξ_o).

Théorème 2.2.

Supposons que le vecteur N soit non caractéristique et que le système d'équations $p_i(x_o, \xi + \tau N) = 0$ n'ait aucune racine τ complexe commune pour ξ non proportionnel à N. Alors (P_i) vérifie $H_2(x_o, N)$.

Choisissons les coordonnées de manière que l'on ait $N = (0, \ldots, 0, 1)$. D'après la continuité des racines de chaque p_i, le système $p_i(z, \zeta' + \tau N) = 0$ n'a pas de racines communes pour $|z - x_o| \leq \alpha$ $|\xi'| = 1$ et $|\eta'| \leq \alpha$ ce qui entraîne trivialement $H_2(x_o, N)$. ... /

88

Exemples

Les systèmes satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2 sont surdéterminés elliptiques. Donnons deux exemples :

1. Dans $\mathbb{C}^m$ identifié à $\mathbb{R}^{2m}$ le système $\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar z_m}, P(z, \frac{\partial}{\partial z}) \right\}$ pour $p(z_o, N) \neq 0$.

2. Dans $\mathbb{R}^n$, le système (P,Q), où le vecteur $N = (0, \ldots, 0, 1)$ est non caractéristique par rapport à P et où la partie principale de Q se réduit à un opérateur en $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$, elliptique en ces variables.

c) Théorème de prolongement (1)

Théorème 2.3.

Soit N le vecteur $(0, \ldots, 0, 1)$ et supposons que la famille (P_i) vérifie l'hypothèse $H_2(x, N)$ en tout point x de la boule fermée $\overline{B(0, \tau)}$ de centre 0 de rayon τ. Il existe alors une constante $\delta > 0$ telle que pour tout $a < \tau$, toute fonction f analytique au voisinage de $\overline{B(o, a)} \cap \{x_n = 0\}$ ayant la propriété que $P_i f$ se prolonge analytiquement dans le cône tronqué de sommet $\delta a N$ et de base $B(o, a) \cap \{x_n = 0\}$, se prolonge elle-même analytiquement dans ce cône.

La constante δ peut être choisie ne dépendant que de τ et de la constante C' de la remarque 2.1.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Désignons par A_ε l'ensemble des directions caractéristiques au système en un point $z = x + iy$ avec $|x| \leq \tau$, $|y| \leq \varepsilon$. D'après le théorème 1.2. il suffit de vérifier que si $\zeta \in A_\varepsilon$, l'hyperplan de normale ζ passant par le point $\delta a N$ rencontre l'ouvert $|x'| < a$, $|y| < \varepsilon$ de $\{x_n = 0\}$.

Il faut donc vérifier que le système d'inéquations $\operatorname{Re} \langle z - \delta a N, \zeta \rangle = 0$ $x_n = 0$, $|x'| < a$, $|y| < \varepsilon$ a une solution sachant que

$$|\xi_n| \leq C' [\varepsilon |\eta| + |\xi'|]$$

d'après la remarque 2.1. appliquée au vecteur $i\zeta$.

On peut par exemple supposer $\xi_n \geq 0$ et d'après la convexité des iné- ... /

quations il suffit de trouver x' et y avec $|x'| < a$, $|y| < \varepsilon$ et $< x', \xi' > - < y, \eta > \ \geqslant \delta a \xi_n$

Or on peut trouver x' tel que $< x', \xi' > = \frac{a}{2} |\xi'|$ et y tel que $< y, \eta > = - \frac{\varepsilon}{2} |\eta|$, d'où l'inégalité

$$\frac{1}{2} [a |\xi'| + \varepsilon |\eta|] \geqslant \delta a \xi_n$$

qui sera vérifiée pourvu que l'on ait $\delta \leq \frac{1}{2 \ell C'}$

d) Théorèmes de prolongement (2)

Théorème 2.4.

Soit Ω un ouvert de U dont la frontière est de classe C^1. Soit x_o appartenant à $\partial\Omega$ et N la normale à $\bar{\Omega}$ en ce point. Supposons que l'hypothèse $H_2(x_o, N)$ soit vérifiée. Il existe alors un voisinage V de x_o tel que si f est analytique dans Ω et $P_i f$ dans $\Omega \cup V$, f se prolonge analytiquement à $\Omega \cup V$.

Théorème 2.5.

Soit ω et Ω deux convexes de U, ω étant localement compact, Ω ouvert, avec $\omega \subset \Omega$. Considérons les hyperplans dont la normale N est limite de direction N' ne vérifiant pas $H_2(x, N')$ en un point (au moins) x de Ω, et supposons que tout hyperplan de ce type qui coupe Ω coupe ω. Alors si f est une fonction analytique au voisinage de ω et si $P_i f$ est analytique dans Ω, f se prolonge en fonction analytique dans Ω.

Corollaire

Soit Ω un ouvert convexe avec $\bar{\Omega} \subset U$. Soit x_o appartenant à $\partial\Omega$ et supposons que toutes les normales N en x_o à $\bar{\Omega}$ vérifient $H_2(x_o, N)$. Il existe alors un voisinage V de x_o tel que si f est analytique dans Ω et $P_i f$ est analytique dans $\Omega \cup V$, f se prolonge analytiquement dans $\Omega \cup V$.

Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas holomorphe.

Remarque 2.3.

Les théorèmes 2.4. et 2.5. contiennent les théorèmes 1.1. et 1.2.

... /

c) Théorèmes d'existence

Théorème 2.6.

Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans U, S une hypersurface analytique de U. On suppose qu'en chaque point x_o de S, la normale N à S vérifie l'hypothèse $H_2(x_o, N)$ relativement à P (cf. le théorème 2.1.). Alors S admet un système fondamental de voisinages V tels que si g est analytique dans V et (h) est un m-uple de fonctions analytiques dans S, le problème de Cauchy $Pf = g$, $\gamma(f) = (h)$ admet une solution et une seule f, analytique dans V.

La démonstration est la même que dans le cas holomorphe.

Théorème 2.7.

Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans U. Soit Ω un ouvert convexe de U avec $\overline{\Omega} \subset U$. Soit x_o appartenant à $\partial\Omega$ et supposons que toutes les normales N à $\overline{\Omega}$ en x_o vérifient l'hypothèse $H_2(x_o, N)$ pour P. Alors x_o admet un système fondamental de voisinages convexes V tels que si g est analytique dans $\Omega \cap V$ il existe f analytique dans $\Omega \cap V$, solution de $Pf = g$.

Ce théorème est " meilleur " que le théorème 1.4. et sa démonstration (dont le principe est le même) un peu plus simple, grâce au fait que l'on peut résoudre le problème de Cauchy au voisinage d'une hypersurface réelle, donc de codimension réelle 1.

III. SOLUTIONS HYPERFONCTIONS

Nous nous plaçons dans le cadre du paragraphe II. Bien qu'elle n'apparaisse pas explicitement ici, la théorie du faisceau C de M. Sato est sous-jacente à cette étude (10).

a) Théorèmes d'unicité (Holmgren)

Théorème 3.1. (11)

Soit Ω un ouvert de U dont la frontière $\partial\Omega$ est de classe C^1. Supposons que la normale N à $\overline{\Omega}$ en un point x_o soit non caractéristique pour le système (P_i). Soit u une hyperfonction sur U solution du système $P_i u = 0$, et supposons u nulle dans Ω. Alors u est nulle au voisinage de x_o. .../

Théorème 3.2.

Soit ω et Ω deux convexes de U, ω étant localement compact, Ω ouvert avec $\omega \subset \Omega$. Considérons les hyperplans dont la normale N est limite de directions caractéristiques en un point au moins de Ω, et supposons que tout hyperplan de ce type qui coupe Ω coupe ω. Alors si u est une hyperfonction sur Ω solution du système $P_i u = 0$, et si u est nulle au voisinage de ω, u est nulle dans Ω.

On pourrait évidemment énoncer un corollaire analogue à celui du théorème 2.5.

On pourrait aussi affaiblir l'hypothèse que les normales sont non caractéristiques (1).

b) Un nouveau théorème de prolongement des fonctions holomorphes

Désignons par $B'(o, a)$ l'intersection avec l'hyperplan $x_n = 0$ de la boule $B(o, a)$ de centre o de rayon a. Soit $N = (0, \ldots, 0, 1)$ et $K(a,\delta)$ le cône ouvert tronqué de base $B'(o, a)$ de sommet $\delta a N$.

Si Γ est un cône de $\mathbb{R}^n$ on désignera par Γ_ε l'intersection de ce cône et de la boule de rayon ε.

Théorème 3.3.

Supposons que l'hypothèse $H_2(x, N)$ soit vérifiée en tout point x de $\overline{B(o,\tau)}$ (relativement à la famille P_i). Soit Γ un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante $\delta > 0$ telle que si f est holomorphe au voisinage de $\overline{B'(o,a)} \times i\Gamma_\varepsilon$ et si $P_i f$ est holomorphe dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de $B'(o, a) \times i\Gamma_\varepsilon$ et du point $\delta a N$, f est holomorphe dans cet ouvert.

Démonstration

Soit A_ε l'ensemble des directions caractéristiques en un point de $\overline{B(o, \tau)} \times i\{|y| \leq \varepsilon\}$. Soit γ un vecteur intérieur à Γ de norme 1

D'après la démonstration du théorème 2.3. tout hyperplan de normale appartenant à A_ε et passant par le point $\delta a N$ rencontre $B'(o, a) \times i\{|y| < \varepsilon\}$. Par homothétie on en conclut qu'il existe un nombre positif α ne dépendant que de (γ,Γ) tel que tout hyperplan de normale appartenant à A_ε et passant par le point $\alpha\,\delta a N + i\frac{\varepsilon}{2}\gamma$ coupe $B'(o,a) \times i\Gamma_\varepsilon$.

Soit K_ε l'intérieur de l'enveloppe convexe de $B'(o,a) \times i\Gamma_\varepsilon$ et de $\alpha\,\delta a N + i\frac{\varepsilon}{2}\gamma$. La fonction f sera holomorphe dans K_ε s'il en est ainsi des $P_i f$. La réunion pour $\varepsilon > 0$ des K_ε sera l'ouvert cherché. .../

c) Problème de Cauchy

Si u est une hyperfonction sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et N un vecteur de S^{n-1} nous dirons, suivant M. Sato (10), que u est analytique dans la direction N s'il existe des parties convexes propres fermées I_α de S^{n-1}, avec $\pm N \notin I_\alpha$, et des fonctions holomorphes f_α dans $\Omega \times i\Gamma_\alpha$ (Γ_α : cône polaire de I_α) au voisinage de Ω, tels que u soit somme des valeurs au bord des f_α.

Si H est un hyperplan de normale N on peut alors définir la restriction de u à $H \cap \Omega$ comme étant la somme des valeurs au bord des fonctions $f'_\alpha = f \,|\, \tilde{H}$, où $\tilde{H}$ est le complexifié de H. Cette restriction ne dépendra pas des f_α choisi.

Si N est non caractéristique pour un opérateur P sur Ω et si Pu est analytique dans la direction N, u est analytique dans la direction N (théorème de Sato (10)).

Théorème 3.4.

Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel d'ordre m sur U. Soit N le vecteur $(0, \ldots, 0, 1)$ et supposons l'hypothèse $H_2(X, N)$ vérifiée en tout point x de $\overline{B(o, r)}$. Il existe alors une constante $\delta > 0$ telle que pour tout $a < r$, toute hyperfonction v définie dans la réunion d'un voisinage de $\overline{B'(o, a)}$ et de $K(a, \delta)$ analytique dans la direction N, tout m-uple (w) d'hyperfonctions définies au voisinage de $\overline{B'(o, a)}$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$, le problème de Cauchy $Pu = v$, $\gamma(u) = (w)$ a une solution u et une seule, hyperfonction analytique dans la direction N définie dans la réunion d'un voisinage de $\overline{B'(o, a)}$ et de $K(a, \delta)$.

Démonstration

Soit (I_α) un recouvrement du complémentaire d'un voisinage de $\pm N$ sur S^{n-1} par des parties convexes propres fermées, telles que si l'on désigne par Γ_α le cône polaire de I_α, v soit somme de valeurs au bord de fonctions g_α holomorphes dans $V \cup K(a, \delta) \times i\Gamma_{\alpha,\varepsilon}$ (V voisinage de $\overline{B'(o,a)}$) et (w) soit somme de valeurs au bord de m-uple (h_α) de fonctions holomorphes dans $V' \times i\Gamma'_{\alpha,\varepsilon}$ où $V' = V \cap \{x_n = 0\}$, $\Gamma'_{\alpha,\varepsilon} = \Gamma_{\alpha,\varepsilon} \cap \{y_n = 0\}$

Soit f_α la solution holomorphe au voisinage de $\overline{B'(o, a)} \times i\Gamma'_{\alpha,\varepsilon}$ du problème de Cauchy $Pf_\alpha = g_\alpha$, $\gamma(f_\alpha) = (h_\alpha)$. Comme le vecteur N est non caractéristique il existe un voisinage cônique $\tilde{\Gamma}_\alpha$ de $\Gamma'_\alpha - \{o\}$ tel que f_α soit holomorphe au voisinage de $\overline{B'(o, a)} \times i\tilde{\Gamma}_{\alpha,\varepsilon}$. On applique alors le théorème 3.3. ... /

L'unicité de u peut se démontrer de la même manière. Supposons en effet que $P f_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} g_\alpha$, $\gamma(f_\alpha) = \sum_{\beta \neq \alpha} (h_{\alpha,\beta})$, où

$g_{\alpha,\beta} = - g_{\beta,\alpha}$, $h_{\alpha,\beta} = - h_{\beta,\alpha}$. On peut résoudre au voisinage de

$\overline{B'(o,a)} \times i\Gamma'_{\alpha,\varepsilon}$ les équations $P f_{\alpha,\beta} = g_{\alpha,\beta}$, $\gamma(f_{\alpha,\beta}) = (h_{\alpha,\beta})$.

Les fonctions $f_{\alpha,\beta}$ seront holomorphes dans les mêmes ouverts que f_α d'après le théorème 5.3. et vérifierons d'après l'unicité du problème de Cauchy

$$f_{\alpha,\beta} = - f_{\beta,\alpha} , \quad \sum_{\beta \neq \alpha} f_{\alpha,\beta} = f_\alpha$$

La somme des valeurs au bord des f_α sera donc nulle.

d) Un théorème d'existence

Théorème 3.5.

Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques qui vérifie l'hypothèse $H_2(x_o, N)$ en un point x_o de U pour un vecteur N. Il existe alors un voisinage Ω de x_o tel que pour tout ouvert ω de Ω et toute hyperfonction v sur ω, il existe une hyperfonction u sur ω solution de $Pu = v$.

Démonstration

D'après le théorème 3.4. il suffit de montrer que l'on peut résoudre l'équation $Pu = v$ quand v est somme de valeurs au bord de fonctions g^+ et g^- respectivement holomorphes dans des ouverts $\omega \times i\Gamma^+$ et $\omega \times i\Gamma^-$, où $\Gamma^\pm$ est le polaire d'un voisinage que l'on peut prendre arbitrairement petit de $\pm N$. Le théorème résulte alors du théorème 1.4.

Remarque 3.1.

Dans le cas où les caractéristiques de P sont simples, les théorèmes 3.4. et 3.5. ont été démontrés par T. Kawai. La méthode de Kawai consiste à construire une solution élémentaire en résolvant des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} P(z, \frac{\partial}{\partial z}) \; E_j(z, \tilde{z}, \eta) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^k E_j(z, \tilde{z}, \eta)\Big|_{z_n = \tilde{z}_n = 0} = \delta_{j,k} \dfrac{1}{\langle z' - \tilde{z}', \eta \rangle^{n-1}} \end{cases}$$

ceci grâce à un théorème de Hamada.

... /

c) Théorèmes de prolongement

Théorème 3.6.

Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques sur U. Soit Ω un ouvert de U dont la frontière $\partial\Omega$ est de classe C^1 en un point x_0. Supposons que la normale N en x_0 vérifie l'hypothèse $H_2(x_0, N)$ pour P. Alors si u est une hyperfonction sur Ω solution de l'équation $Pu = 0$, u se prolonge de manière unique au voisinage de x_0 en solution hyperfonction de l'équation $Pu = 0$

Démonstration

Ce théorème résulte du théorème 3.5. de la même manière que le théorème 1.1. résulte du théorème de Cauchy-Kowalevski précisé puisque si $Pu = 0$; u est analytique dans la direction N.

Théorème 3.7.

Soit ω et Ω deux convexes de U, ω étant localement compact, Ω ouvert avec $\omega \subset \Omega$. Considérons les hyperplans dont la normale N est limite de directions N' ne vérifiant pas l'hypothèse $H_2(x, N)$ pour P, en un point (au moins) de Ω, et supposons que tout hyperplan de ce type qui coupe Ω coupe ω. Alors si u est une hyperfonction au voisinage de ω solution de $Pu = 0$, u se prolonge (de manière unique) en solution hyperfonction sur Ω de l'équation $Pu = 0$.

Démonstration

Soit A l'adhérence des directions N ne vérifiant pas $H_2(X, N)$ pour un x de Ω. Soit $z \in \Omega$. Il résulte du théorème 3.6. que si ω_0 est un ouvert relativement compact de ω, u se prolonge au voisinage de l'enveloppe convexe de $\overline{\omega}_0$ et de z (la démonstration est la même que pour le théorème 1.2.)

Soit alors ω_t $(0 \leq t < 1)$ une famille d'ouverts convexes relativement compacts dans ω tels que $\bigcup_{t < t_0} \omega_t = \omega_{t_0}$, $(\omega_t)_{t > t_0}$ est un sysème fondamental de voisinages de $\overline{\omega}_{t_0}$.

Soit L_t l'intérieur de l'enveloppe convexe de ω_t et de z.

Soit t_0 le plus petit t tel que u ne se prolonge pas à L_t pour $t > t_0$. Il résulte du théorème 3.6. que $t_0 = 1$ car les normales à L_t hors de ω et de z_1 n'appartiennent pas à A.

... /

Pour tout z de Ω, u se prolonge donc en solution hyperfonction de l'équation $Pu = 0$ dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de z et de ω. Les différents prolongements se recollent quand z parcourt Ω d'après le théorème 3.2. et définissent le prolongement cherché.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer l'analogue du corollaire du théorème 1.2.

B I B L I O G R A P H I E

1 BONY (J.-M.). - Une extension du théorème de Holmgren sur l'unicité du problème de Cauchy. C.R.Acad.Sc.Paris, 268, p. 1103, 1969.

2 BONY (J.-M.) et SCHAPIRA (P.). - Sur le prolongement des solutions holomorphes d'équations aux dérivées partielles définies dans des ouverts convexes. C.R.Acad.Sc. (à paraître).

3 BONY (J.-M.) et SCHAPIRA (P.). - Prolongement analytique des solutions des systèmes hyperboliques non stricts. C.R.Acad. Sc. (à paraître).

4 BONY (J.-M.) et SCHAPIRA (P.). - Solutions analytiques et solutions hyperfonctions du problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques non stricts.

5 HÖRMANDER (L.). - Linear Partial Differential Operators. Springer, 1963.

6 KAWAÏ(T.). - Construction of elementary solutions for I-hyperbolic operators and solutions with small singularities. Proc. Japan Acad. 46, p. 912-915, 1970.

7 KAWAÏ (T.). - On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations (I) et (II). University of Kyoto, 1971, preprint (à paraître aux Proc. Japan Acad.).

8 KISELMAN (C.-O.). - Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. Bull. Soc. Mat. France, 97, p. 329-356, 1969.

96

9 LERAY (J.) et OHYA (Y.). - Systèmes linéaires hyperboliques non stricts. Colloque sur l'analyse fonctionnelle. Liège 1964. C.B.R.M.

10 SATO (M.). - Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Congrès International de Mathématiques, Nice, 1970.

11 SCHAPIRA (P.). - Théorème d'unicité de Holmgren et opérateurs hyperboliques dans l'espace des hyperfonctions . Anaïs Acad. Brasil Sc. (à paraître).

12 ZERNER (M.). - Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles. C.R.Acad.Sc. Paris, t. 272, p. 1646-1648, 1971.

J.-M. BONY (Université de Paris VI)
66, rue Gay-Lussac
PARIS (V°)

P. SCHAPIRA (Université de Paris VII)
57, rue Boissonade
PARIS (XIV°)