数理解析研究所講究録
162 巻 1972 年 55-66

Un théorème de type de Matsushima-Murakami concernant l'intégral des fonctions multiformes

par K. AOMOTO

Dans cette note on va énoncer un théorème de type de Matsushima-Murakami dans l'espace complémentaire d'un espace projectif complexe P^{ℓ} moins un diviseur à savoir un ensemble algébrique de codimension une. Plus généralement soit M une variété complexe et $\tilde{M}$ son revêtement universel. Le groupe fondamental G de M par rapport à un point base O de M opère sur $\tilde{M}$ comme 'Decktransformation'

$$(0,1) \qquad G \times \tilde{M} \ni (\gamma, x) \rightarrow \gamma . x \in \tilde{M}.$$

Soit ρ une représentation linéaire du groupe G dans le groupe linéaire general GL(A) où A désigne un espace linéaire complexe de dimension n. On désigne par $\mathcal{D}^p(\tilde{M}; \rho, A)$ ou $\mathcal{H}^p(\tilde{M}; \rho, A)$ respectivement les espaces des p-formes différentiables ou holomorphes $\tilde{\varphi}(x)$ sur $\tilde{M}$, à valeurs dans A, telles que l'on ait

$$(0,2) \qquad \tilde{\varphi}(\gamma . x) = \rho(\gamma) . \tilde{\varphi}(x).$$

Les espaces $\mathcal{D}(\tilde{M}; \rho, A) = \sum \oplus \mathcal{D}^p(\tilde{M}; \rho, A)$ et $\mathcal{H}(\tilde{M}; \rho, A) = \sum \oplus \mathcal{H}^p(\tilde{M}; \rho, A)$ sont munies de structure de complexe de de Rham par rapport à la dérivation extérieure ordinaire d. On désignera leurs cohomologies de dimension p par $H^p(\tilde{M}; \rho, A)$ et $H^p_{\mathfrak{O}\iota}(\tilde{M}; \rho, A)$ respectivement. La représentation linéaire ρ de G définit à la manière canonique sur M le système local $\{A_\rho\}$ localement isomorphe à A. On désignera par $H^p(M; \{A_\rho\})$ ou $H^p_{\mathfrak{O}\iota}(M; \{A_\rho\})$ leurs cohomologies différentiables ou holomorphe respectivement. On a les isomorphismes canoniques

(0,3) $\quad H^p(\tilde{M};\rho,A) = H^p(M;\{A_\rho\})$ et $H^p_{\mathfrak{A}}(\tilde{M};\rho,A) = H^p_{\mathfrak{A}}(M;\{A_\rho\})$.

Si M est une variété de Stein on a l'isomorphisme

(0,4) $\quad H^p(M;\{A_\rho\}) = H^p_{\mathfrak{A}}(M;\{A_\rho\})$.

De même la représentation contra-gradiente $\hat{\rho}$ de ρ définit sur M le système local $\{A^*_\rho\}$ localement isomorphe au dual A* de A. On désignera par $H_p(M;\{A^*_\rho\})$ sa homologie de dimension p. D'après Eilenberg et MacLane (voir [6] ~~page~~) $H_p(M;\{A^*_\rho\})$ est dual à $H^p(M;\{A_\rho\})$. Leur pair n'est autre chose que l'intégral des fonctions multiformes $\tilde{\varphi}(x)$ de $\mathcal{D}^p(\tilde{M};\rho,A)$ sur un cycle σ définissant un élément de $H_p(M;\{A^*_\rho\})$:

(0,5)
$$H^p(\tilde{M};\rho,A) \times H_p(M;\{A^*_\rho\}) \to \mathbb{C}$$
$$(\tilde{\varphi}, \sigma) \to \int_\sigma \tilde{\varphi}$$

Supposons maintenant qu'il existe une connexion holomorphe et localement euclidienne dans $\{A_\rho\}$ qui s'induit de l'espace basé M , à savoir une fonction holomorphe Y sur $\tilde{M}$ à valeurs dans $GL(A)$ de sorte que l'on ait pour $\gamma \in G$ et $x \in \tilde{M}$ quelconques

(0,6) $\quad Y(\gamma . x) = \rho(\gamma).Y(x)$.

On note par $\mathcal{D}^p(M;A)$ ou $\mathcal{H}^p(M;A)$ les espaces des p-formes différentiables ou holomorphes sur M respectivement à valeurs dans A. Alors on a les isomorphismes

(0,7) $\quad \mathcal{D}^p(M;A) \cong \mathcal{D}^p(\tilde{M};\rho,A)$ ou $\mathcal{H}^p(M;A) = \mathcal{H}^p(\tilde{M};\rho,A)$

respectivement par l'application $\varphi \in \mathcal{D}^p(M;A) \mapsto Y.\varphi \in \mathcal{D}^p(\tilde{M};\rho,A)$. On écrit par ω la forme matricielle $Y^{-1}.dY$ qui est holomorphe dans M. Vu que $d(Y.\varphi) = Y.(d\varphi + \omega\wedge\varphi)$, les cohomologies $H^*(\tilde{M};\rho,A)$ ou $H^*_{\mathfrak{A}}(\tilde{M};\rho,A)$ sont isomorphes à (M;

aux H*(M;) ou H*(M;) respectives qui

$H^*(M;[\omega],A)$ ou $H^*_{\mathfrak{a}}(M;[\omega],A)$ respectives. Ces derniers sont définies comme suit : $\mathcal{D}^*(M;A) = \sum \oplus \mathcal{D}^p(M:A)$ ou $\mathcal{H}^*(M;A) = \sum \oplus \mathcal{H}^p(M;A)$ deviennent des complexes de de Rham munis de l'opérateur de cobord $\delta : \delta\varphi = d\varphi + \omega\wedge\varphi$. On désigne par $H^*(M;[\omega],A)$ ou $H^*_{\mathfrak{a}}(M;[\omega],A)$ les cohomologies correspondantes.

Supposons de plus que M soit une variété algébrique projective $\overline{M}$ moins un diviseur S de $\overline{M}$. On note par $\mathcal{D}^*_T(M,S;A)$ la somme $\sum \oplus \mathcal{D}^p_T(M,S;A)$ où $\mathcal{D}^p_T(M,S;A)$ désigne l'espace des p-formes différentiables sur M et de croissance tempérée en S. On note aussi par $\mathcal{H}^*_T(M,S;A)$ la somme $\sum \oplus \mathcal{H}^p_T(M,S;A)$ où $\mathcal{H}^p_T(M,S;A)$ désigne la partie commune de $\mathcal{D}^p_T(M,S;A)$ et $\mathcal{H}^p(M;A)$ qui s'identifie avec l'espace des p-formes holomorphes dans M et méromorphes dans $\overline{M}$. Ces deux espaces $\mathcal{D}^*_T(M,S,A)$ et $\mathcal{H}^*_T(M,S,A)$ deviennent des sous-complexes de $\mathcal{D}^*(M;A)$ et $\mathcal{H}^*(M;A)$ respectives. par rapport à l'opérateur δ. On note par $\mathcal{D}^*_T(\widetilde{M};[Y],A)$ ou $\mathcal{H}^*_T(\widetilde{M};[Y],A)$ respectivement la somme $\sum \oplus \mathcal{D}^p_T(\widetilde{M};[Y],A)$ ou $\sum \oplus \mathcal{H}^p_T(\widetilde{M};[Y],A)$ où $\mathcal{D}^p_T(\widetilde{M};[Y],A)$ désigne le sous-espace de $\mathcal{D}^p(\widetilde{M};\rho,A)$ consistant en des p-formes qui s'écrivent comme $Y.\varphi$ où $\varphi\in\mathcal{D}^p_T(M,S;A)$ et $\mathcal{H}^p_T(\widetilde{M};[Y],A)$ désigne la partie commune de $\mathcal{D}^p_T(\widetilde{M};[Y],A)$ et $\mathcal{H}^p(\widetilde{M};\rho,A)$. Ces dernières deux espaces $\mathcal{D}^*_T(\widetilde{M};[Y],A)$ et $\mathcal{H}^*_T(\widetilde{M};[Y],A)$ aussi deviennent des sous-complexes de $\mathcal{D}^*(\widetilde{M};\rho,A)$ et $\mathcal{H}^*(\widetilde{M};\rho,A)$ respectives. On a les isomorphismes évidents :

(0,8) $\qquad H^p(\widetilde{M};[Y],A) = H^p(M;[\omega],A)$ et $H^p_{\mathfrak{a}}(\widetilde{M};[Y],A) = H^p_{\mathfrak{a}}(M;[\omega],A)$

où $H^p(\widetilde{M};[Y],A)$ et $H^p_{\mathfrak{a}}(\widetilde{M};[Y],A)$ désignent les cohomologies des de dimension p des complexes $\mathcal{D}^*_T(\tilde{M};[Y],A)$ et $\mathcal{H}^*_T(\tilde{M};[Y],A)$ respectifs.

Si la fonction $Y(x)$ est de croissance tempérée en S alors l'espace $\mathcal{D}^*(\tilde{M};[Y],A)$ consiste en des formes différentiables dans $\tilde{M}$ qui sont de croissance tempérée en S et qui satisfont à (0,2).

On utilisera le théorème suivant dû à Grothendieck et Deligne (voir [5] ~~et [ ]~~).

Théorème de comparaison. Si la connexion Y est de croissance tempérée en S, en particulier si $\omega = Y^{-1}.dY$ est du type de singularités régulières en S alors on a l'isomorphisme

(0,9) $$H^p(M;[Y],A) \cong H^p(M;\rho,A).$$

De plus si M est une variété de Stein on a

(0,10) $$H^p(M;\rho,A) = H^p_{DL}(M;\rho,A)$$

en particulier on a

(0,11) $$H^p(M;\rho,A) = (0) \quad \text{pour } p \geq \ell + 1$$

où $\ell = \dim M$.

On supposera dans ce qui suit que M soit l'espace projectif complexe et S un diviseur. Supposons que

(H-1) La représentation ρ du groupe G soit donnée comme monodromie à laquelle le système différentiel linéaire

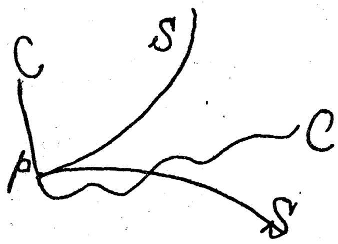
(0,12) $$Y^{-1}.dY = \omega$$

donne naissance, où la forme de connexion ω n'a que des pôles logarithmiques le long de S. Dans ce cas-là on sait que la forme ω est fermée et satisfait à l'équation algébrique suivante :

(0,13) $$\omega \wedge \omega = 0$$

(voir [1] page ou [5] page).

Soit ι une application holomorphe du disque unité $D = \{|z| < 1\}$ dans $\bar{M}$ telle que l'image $\iota(D)$ ne soit pas contenue dans S et que $\iota(0)$ soit un point p de S. On dit 'résidu de la forme ω en p le long d'une courbe analytique $C = \iota(D)$' le résidu de la forme induite $\iota^*(\omega)$ en 0 dans D. L'ensemble des résidus de ω en p le long des toutes les courbes analytiques C passant par p forme un semi-groupe d'un nombre fini de générateurs. Soient $C_1, C_2, \dots, C_r$ les courbes analytiques correspondant à ces générateurs. On désigne par $U_{C_1}, U_{C_2}, U_{C_3}, \dots, U_{C_r}$ les résidus de ω en p le long des courbes $C_1, C_2, \dots, C_r$ respectivement. Faisons l'hypothèse suivante :



(H-2) <u>Aucune matrice d'entre $U_{C_1}, U_{C_2}, \dots, U_{C_r}$ n'a un entier non-négatif</u> 0,1,2,3,... <u>comme valeurs propres</u>. de m

Alors on a

<u>Théorème</u> $H^p(M; \{A_\rho\}) \cong (0)$ <u>pour</u> $p \leqq \ell - 1$ d <u>dans le cas où</u> S <u>consiste en des hyperplans ou bien dans le cas où</u> ℓ <u>est égal à</u> 2 <u>et</u> S <u>est quelconque</u>.

L'ensemble des représentations linéaires de G dans GL(A) forme un sous-ensemble algébrique $\mathcal{R}$ dans le produit GL(A)xGL(A)x... x GL(A) (m produit) où m désigne le nombre des générateurs du groupe G. L'ensemble des représentations linéaires ρ de G telles l'on ait

(0,14) $\qquad H^p(M; \{A_\rho\}) = (0) \quad$ pour $0 \leqq p \leqq \ell - 1$,

est ouvert dans $\mathcal{R}$. Le théorème précédent implique que <u>cet ensemble n'est pas vide</u>. Quand (0,14) est vérifiées, en utilisant l'égalité suivante

(0,15) $$\mathcal{X}(M;\{A_\rho\}) = n\,\mathcal{X}(M)$$

où $\mathcal{X}(M;\{A_\rho\})$ ou $\mathcal{X}(M)$ désignent les caractéristiques d'Euler $\sum(-1)^p \operatorname{rang} H^p(M;\{A_\rho\})$ ou $\sum(-1)^p \operatorname{rang} H^p(M;\mathbb{C})$ respectives, on peut faire le calcul du rang $H^\ell(M;\{A_\rho\})$.

<u>Corollaire 1.</u> <u>Dans le cas où</u> S <u>consiste en des hyperplans en nombre</u> $m \geqq \ell + 2$ <u>d'intersection générale les unes des autres, le revêtement universel</u> $\tilde{M}$ <u>n'est pas contractible</u>.

En effet on peut trouver une forme de connexion ω satisfaisant à l'hypothèse du théorème 1 de sorte que l'on ait

(0,16) $$\operatorname{rang} H^\ell(M;\{A_\rho\}) = \mathcal{X}(M;\{A_\rho\}) = (m-2)(m-3)\cdots(m-\ell-1)/\ell\,!$$

qui ne s'annule pas. D'autre part G étant librement abélien on a

(0,17) $$H^p(G;A_\rho) = (0) \qquad \text{pour } p \geqq 0$$

si ρ est générique. D'après un théorème d'Hurewicz on a l'assertion.

Pour une autre application considerons dans l'espace affin $\mathbb{C}^\ell$ l'union S* des hyperplans $x_i = 0$, $x_i = 1$ et $x_i = x_j$ $(i \neq j)$ par rapport aux coordonnées affines $(x_1, x_2, \dots, x_{\ell})$ de $\mathbb{C}^\ell$. Soit S S* plus l'hyperplan à l'infini dans P^ℓ. On sait que le revêtement universel $\tilde{M}$ de $M = P^\ell - S$ est un domaine borné et homéomorphe à l'espace euclidienne $R^{2\ell}$ de 2ℓ dimensions (voir [3] ~~page~~). D'après le théorème d'Hurewicz on a pour p quelconque

(0,18) $$H^p(G;A_\rho) = H^p(M;\{A_\rho\}).$$

Or pour cet ensemble S on constate qu'il existe une forme de connexion ω satisfaisant à (H-2). Dans ce cas-là (0,14) est vérifiée d'où <u>il vient pour</u> $p \neq \ell$,

(0,19) $$H^p(G;A_\rho) \cong (0)$$

Aussi est ce groupe de type de Matsushima-Murakami.

SS 1. Esquisse de la démonstration du théorème.

Pour démontrer le théorème on va utiliser 'Principe de Lefschetz' comme Zariski a cherché le groupe fondamental de $P^{\ell} - S$ (voir [9] ~~page~~).

Moyennant la suite de résidu et la suite spéctrale dues à Leray on peut réduire le calcul des cohomologies de $P^{\ell} - S$ à celui des cohomologies dans les espaces de dimension une. Celui-ci revient au calcul des cohomologies des certaines algébres de Lie attachées à SS moyennant des équations différentielles linéaires déterminant des systèmes locals.

On note par X l'espace projectif complexe de dimension ℓ P^{ℓ}, et par X_1 un diviseur S. On prend un point base O de $X - X_1$. On pose $\hat{X} = X - (O)$. Soit $X^{(1)}$ un hyperplan de X disjoint à O. On considère le faisceau des droites $L_{p^{(1)}}$ passant par O et des points $p^{(1)}$ de $X^{(1)}$ de sorte que $\hat{X}$ soit un espace fibré holomorphe en droite dont la base est $X^{(1)}$ et dont la fibre est $L_{p^{(1)}} - (O)$. On note par $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ l'ensemble des points d'intersection générale $L \wedge X_1$, où m désigne le degré de X_1. Soit π la projection canonique de $\hat{X}$ sur $X^{(1)}$. Soit $X_1^{(1)}$ le sous-ensemble de $X^{(1)}$ des points $p^{(1)}$ tels que certains d'entre a_1, $a_2, \ldots, a_{m-1}$ et a_m coïncident. $X_1^{(1)}$ est évidemment un diviseur de $X^{(1)}$. On prend ensuite un point base $O^{(1)}$ de $X^{(1)} - X_1^{(1)}$ et on pose $\hat{X}^{(1)} = X_1^{(1)} - (O^{(1)})$. Soit $X^{(2)}$ un hyperplan de $X^{(1)}$ disjoint à $O^{(1)}$. Alors $\hat{X}^{(1)}$ devient un espace fibré en droite dont la base est $X^{(2)}$ et dont la fibre est la droite $L^{(1)}_{p^{(2)}}$ reliant $O^{(1)}$ et un point $p^{(2)}$ de $X^{(2)}$. On note par $\pi^{(1)}$ la projection canonique de $\hat{X}^{(1)}$ dans $X^{(2)}$ et par $X_1^{(2)}$ le sous-

ensemble de $X^{(2)}$ des points $p^{(2)}$ de sorte que la droite $L^{(1)}_{p^{(2)}}$ ne rencontre pas $X_1^{(1)}$ en position générale, ainsi de suite....
En général on obtient la projection $\pi^{(i)}$ de $\hat{X}^{(i)}$ sur $X^{(i+1)}$ dont la fibre est la droite $L^{(i)}_{p^{(i+1)}} - (0^{(i)})$. Par réccurrence on pose $X^{(i)}_{j+1} = \pi^{(i)-1}(X_j^{(i+1)})$. On a ainsi le diagramme suivant :

$$\begin{array}{cccccccc}
X \supset \hat{X} & & X_1 & & X_2 & X_3 & \cdots\cdots & X_{l-1} \quad X_l \\
 \swarrow^{\pi} & \swarrow^{\pi} & & \swarrow^{\pi} & \swarrow^{\pi} & & \swarrow & \swarrow^{\pi} \\
X^{(1)} \supset \hat{X}^{(1)} & & X_1^{(1)} & & X_2^{(1)} & & \cdot & X_{l-1}^{(1)} \\
\swarrow^{\pi^{(1)}} & \swarrow^{\pi^{(1)}} & & \swarrow^{\pi^{(1)}} & & & & \swarrow \\
X^{(2)} \quad \hat{X}^{(2)} & & X_1^{(2)} & & & & \cdot\,\cdot\,\cdot & \\
\swarrow & \swarrow & & & & & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
X^{(i)} \quad \hat{X}^{(i)} & \swarrow & X_1^{(i)} & \swarrow & & X_{l-i}^{(i)} & \swarrow & \\
\swarrow & \swarrow & & & \swarrow & & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & & & & \\
X^{(l-2)} \quad \hat{X}^{(l-2)} & & X & \swarrow & & & & \\
X^{(l-1)} \xleftarrow{\pi^{(l-2)}} X \xleftarrow{\pi^{(l-2)}} & & & & & & &
\end{array}$$

où $X^{(i)}$ et $\hat{X}^{(i)}$ sont de dimension $(l - i)$ et $X_j^{(i)}$ $(j \geq 1)$ sont des diviseurs de $X^{(i)}$. L'application $\pi^{(i)}$

$$(1,1) \qquad \hat{X}^{(i)} - X_1^{(i)} - X_2^{(i)} \rightarrow X^{(i+1)} - X_1^{(i+1)}$$

est non-singulière. On note par $F^{(i)}$ sa fibre générale qui est isomorphe à $L^{(i)} - L^{(i)} \wedge X_1^{(i)}$. Supposons que

(H-3) $H^{\varepsilon_1}(F^{(l-1)}; H^{\varepsilon_2}(F^{(l-2)}; \ldots H^{\varepsilon_l}(F; \{A_p\})))$

s'annulent si un des ε_j est nul où ε_j parcournet 0 ou 1.
Alors on a aisément la

<u>Proposition</u> 1. <u>Il existent une suite spectrale</u> $E_r^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_l}$ <u>où</u> ε_j <u>est egal à</u> 0 <u>ou</u> 1 <u>et une filtration de</u> $H^*(\hat{X}^{(i)} - X_{1,2,3,\ldots l}\ ; \{A_p\})$:

$$(1,2) \qquad H^p(\hat{X} - X_{1,2,3\cdots l}\ ; \{A_p\}) \supset \mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \cdots \cdots\cdots \supset \mathcal{G}_{\binom{l}{p}} \supset (0)$$

<u>telles que l'on ait</u>

$$(1,3) \qquad \frac{H^p(\hat{X} - X_{1,2,3,\cdots l}\ ; \{A_p\})}{\mathcal{G}_1} = E_2^{\overbrace{0\ 0 \cdots 0}^{(l-p)}\ \overbrace{1 \cdots 1}^{p}}$$

....

$$\frac{\mathfrak{g}_i}{\mathfrak{g}_{i+1}} \cong E_2^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_l}$$

....

$$\mathfrak{g}_{\binom{l}{p}} \cong E_2^{\underbrace{1\,1\cdots 1}_{p}\,\underbrace{0\cdots 0}_{l-p}}$$

<u>et que</u>

(1,4) $\qquad E_2^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_l} \cong H^{\varepsilon_1}(F^{(l-1)}; H^{\varepsilon_2}(F^{(l-2)}; \ldots H^{\varepsilon_l}(F; \{A_p\}))\ldots.)$

<u>où on a posé</u> $X_{1\,2\,3\cdots l} = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots \cup X_l$.

Soit w la coordonnée affine de la droite $L_{p^{(1)}}$ passant par 0 et un point $p^{(1)}$ de $X^{(1)}$ telle que l'origine et le point à l'infini correspondent à 0 et $p^{(1)}$ respectivement. Alors la forme matricielle d'ordre m $\left(d(a_i - a_j)/(a_i - a_j) \right)$ $(1 \leqq i,j \leqq m)$ est définie dans un revêtement ramifié $\tilde{X}^{(1)}$ de $X^{(1)}$. Soient $N^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq r)$ le système de tous les résidus de cette forme dans $\tilde{X}^{(1)}$. On voit que les éléments $n_{ij}^{(\nu)}$ sont des entiers et symétriques: $n_{ij}^{(\nu)} = n_{ji}^{(\nu)}$.
On note par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie engendrée des éléments $u_1, u_2, \ldots, u_m$ avec les relations fondamentales

(1,5) $\qquad \sum_{1 \leqq j \leqq m,\, j \neq i} n_{ij}^{(\nu)} [u_i, u_j] = 0$ et $\sum_1^m u_i = 0$

où $1 \leqq \nu \leqq r$ et $1 \leqq i \leqq m$.

Alors la donnée d'une forme de connexion ω satisfaisant à (H-1) équivaut au donner une représentation linéaire ρ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(A)$ (voir [1] ~~page~~). Dans cette situation on peut démontrer la

<u>Proposition</u> 2. <u>Aux hypothèses</u> (H-1) <u>et</u> (H-2) <u>on a</u>

(1,6) $\qquad H^1(\mathfrak{g}, A) = (0).$

Le système local $H^1(F; \{A_p\})$ sur $X^{(1)} - X_1^{(1)}$ s'écrit en forme explicite moyennant une équation différentielle linéaire qui est une généralisation de l'équation classique de Pochhammer.

Supposons en effet que la forme de connexion ω s'exprime par rapport à la coordonnée w sur la droite $L_{p^{(1)}}$ de la maniere suivante :

$$(1,7) \qquad Y^{-1}.dY = \omega = \sum_{1}^{m} U_j \, d(w - a_j)/(w - a_j)$$

où U_j désigne le résidu de ω en a_j qui se montre indépendant de $p^{(1)}$ de $X^{(1)}$ (voir [1]). Si la forme ω remplit (H-1) ainsi que l'hypothèse suivante plus faible que (H-2) :

(H-2)' <u>Aucune matrice d'entre</u> U_1 , U_2 , ..., U_m <u>n'a un entier positif</u> 1,2,3,... <u>comme valeurs propres</u>,

alors tout élément de $H^1(F;[\omega], A_\rho)$ s'écrit comme

$$(1,8) \qquad \sum_{1}^{m} Y . \xi^{(j)} dw/(w - a_j)$$

où $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(m)})$ signifie un élément de A^m mod. $(U_1\eta, U_2\eta, \ldots, U_m\eta)$ pour un certain η de A. Remarquons que la représentation précedente ρ de $\mathfrak{g}$ est définie par la correspondence $u_j \to U_j$ $(1 \leq j \leq m)$. Par un calcul élémentaire on a la

<u>Proposition</u> 3. Le système local $H^1(F;[\omega],A_\rho)$ sur $X^{(1)} - X_1^{(1)}$ s'écrit moyennant l'expression (1,8) comme suit :

$$(1,9) \qquad \sum_{1}^{m} d\langle \sigma , \theta_i \rangle \, \xi^{(i)} =$$

$$= \langle \sigma , \sum_{i \neq j} (\theta_i - \theta_j).U_j . \xi^{(i)} . \, d(a_i - a_j)/(a_i - a_j) \rangle,$$

où θ_i désigne la forme $Y.dw/(w - a_i)$ et σ un cycle de $H_1(F; \{A_\rho^*\})$. Cette équation differentielle n'est définie que sur $\tilde{X}^{(1)}$.

En utilisnat cette équation on conclut de la proposition 1 que

<u>Proposition</u> 4. <u>Aux hypothèses</u> (H-1) <u>et</u> (H-2) (1,6) <u>implique que</u>

$$(1,10) \qquad H^1(\hat{X} - X_{1\,2\,3\,\cdots\,\ell} \; ; \{A_\rho\}) = (0).$$

Or on peut généraliser la suite de résidu (Thom-Gysin) dans le cas des coéfficients des systèmes locals. En appliquant ces diverses suites on voit que la proposition précédente entraine la

<u>Proposition</u> 4. <u>Aux mêmes hypothèses qu'à la précédente on a</u>

$$(1,11) \qquad H^1(X - X_1 \; ; \{A_\rho\}) = (0).$$

Pour la démonstration du théorème on constate d'abord que (H-1) et (H-2) impliquent (H-3). Ensuite on démontre la p en réccurrence la proposition 1 . Par conséquent on a

$$(1,12) \qquad H^p(\hat{X} - X_{1\,2\,3\,\cdots\,\ell} \; ; \{A_\rho\}) = (0),$$

pour $p \leq \ell - 1$. En applicant les suites de résidus on arrive à la conclusion du théorème.

On ne sait pas si le théorème est généralisé pour un diviseur quelconque S dans un espace projectif complexe P^ℓ.

Les détails de la démonstration du théorème paraitra ailleurs.

Bibliographies.

[1] K.AOMOTO, Sur la forme de connexion euclidienne du type régulier, Proc.Japan Acad. Vol.46,No.7 (1970) pp 660-662.

[2] L.Bers, Spaces of Riemann surfaces as bounded domains, Bull.Amer.Math.Vol.66(1960), pp 98-103.

[3] V.I.Arnold, Braids of algebraic functions and cohomologies of swallowtails, Uspehi Mat.Nauk 23, no.4(142),(1968) pp 247-248.

[6] S.Eilenberg and S.MacLane, Homology of Spaces with Operators I,II, Trans.AMS. 61, pp 378-417 (1947) et 65, pp.49-99 (1949).

[4] P.Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lec.Note 163, Springer.

[5] - , Théorie de Hodge, miméographié à I.H.E.S.(1970).

[7] J.Leray, Un complément au théorème de N.Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébriques, Bull.Soc.Math.France 95,1967,pp 313-374.

[8] S.Murakami, Cohomologies of vector valued forms on compact locally symmetric Riemannian manifolds, Algebraic groups and discontinuous groups, Proc.Sympo.Pure Math. Vol 9(1966).

[9] O.Zariski, A theorem on the Poincaré group of the residual spaces of algebraic hypersurfaces, Ann. of Math. Vol.38(1937).

Université de Tokyo