

成層流体中の球のおよそ運動
と特異摂動法

東大 生研 成瀬 文雄

§1. あらまし

重力方向に密度が変化する成層流体中に物体がすすむときの流れを、(i) 定常、(ii) 非圧縮 (iii) 熱又は濃度の非拡散、(iv) Boussinesq 近似を仮定して取扱ふ。以下のことが示される。

(a) 静止状態で密度 ρ が $\rho/\rho_0 = 1 - ky^n$ の如く変化してゐる非圧縮流体がある。この中で対称物体 (物体の形が x, y, z に関し、これぞ

れ対称、例之は楕円体の如き物体) が x 軸上をすべりながら進むとき、物体に働く力は x 方向だけである。(

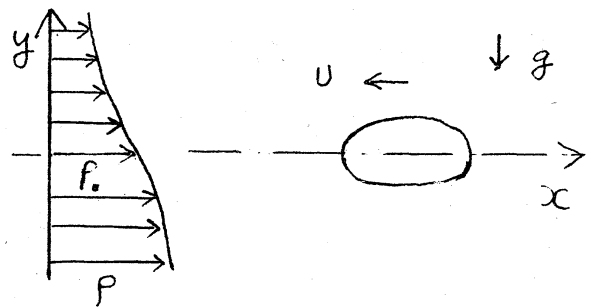


Fig. 1

(b) 静止状態での密度 ρ が $\rho/\rho_0 = 1 - ky$ で表示される流

(1)

体中を、半径 a の球がおそい速度 U ですすむときの運動を特異攝動法で解析し、球に働く抵抗を決定した。

§2. 基礎方程式

溶質の濃度が変化するため密度が変化する非圧縮流体を考へる。溶質の濃度を ρ とするとき、 ρ と ρ_0 の間に次式が成立する。

$$\rho = \rho_0 \{ 1 + \lambda (\rho - \rho_0) \} \quad (1)$$

今溶質の濃度の非拡散を仮定するとき、流線によって $\rho =$ 一定であり、これは (1) より流線によって $P =$ 一定となる。したがって基礎方程式¹⁾は

$$\rho \frac{Dq}{Dt} = -\nabla P + \mu \Delta q + P X \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P q) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{DP}{Dt} = 0 \quad (4)$$

ここで $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + q \cdot \nabla$, q は速度、 P は圧力、 μ は粘性係数、 X は体積力を表わす。

(2) ~ (4) の式は、大気のような密度変化のある気体に対しても、非圧縮を仮定できるような流れであれば、やはり成立する。

$$\text{今 } P/\rho_0 = 1 - \epsilon y^n + P', \quad P'/\rho_0 = P_0/\rho_0 + (\frac{1}{n+1}) \epsilon \rho_0 y^{n+1} + P''$$

(2)

で、 P' , P' を導入、 $X = -g\hat{j}$ (g は重力の加速度、 \hat{j} は y 方向の単位ベクトル) とおいて、Boussinesq 近似をするとき、(2) ~ (4) 式は次の如くなる。

$$\frac{Dq}{Dt} = -\nabla P' + \nu \Delta q - P' g \hat{j} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot q = 0 \quad (6)$$

$$\frac{DP'}{Dt} - n k y^{n-1} q \cdot \hat{j} = 0 \quad (7)$$

次式で無次元変数 \bar{q} , \bar{p} , ... を導入するとき、

$$\frac{q}{U} = \bar{q}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}), \quad \frac{\rho_0 P'}{U\mu} = \bar{p}, \quad \frac{P'}{n a^n k} = \bar{p}, \quad \frac{y}{a} = \bar{y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad (8)$$

(5) ~ (7) 式は、次の如くなる。

$$Re \bar{q} \cdot \nabla \bar{q} = -\nabla \bar{p} - B Re \bar{p} \hat{j} + \Delta \bar{q} \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \bar{q} = 0 \quad (10)$$

$$\bar{q} \cdot \nabla \bar{p} - \bar{v} \bar{y}^{n-1} = 0 \quad (11)$$

$$\therefore \text{で} \quad Re = \frac{U a \rho_0}{\mu}, \quad B = \frac{g a^2 k}{U^2} \quad (12)$$

($B^{\frac{1}{2}}$ は Russell number と呼んで「レイノルズ数」でもある) 境界条件は

$$\bar{r} \rightarrow \infty \quad \left. \begin{array}{l} \bar{z}' \quad \bar{q} = 0 \\ \bar{z}'' \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{p} = \bar{p} = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\}; \quad \text{物体表面上で} \quad \bar{q} = 0 \quad (13)$$

§ 3. 物体に働く力について

静止状態での密度 ρ が $\rho = \rho_0 (1 - \alpha y^2)$ で表示される成層流体中で、対称物体（物体の形が x, y, z に肉し対称）がすすむとき、物体に固定した座標系で考える。

(i) 物理的考察

まず物体に働く力について物理的に考えて見よう。簡単のため Fig. 2 の如く $n=1, \alpha > 0$ の場合を考える。A, B にあ

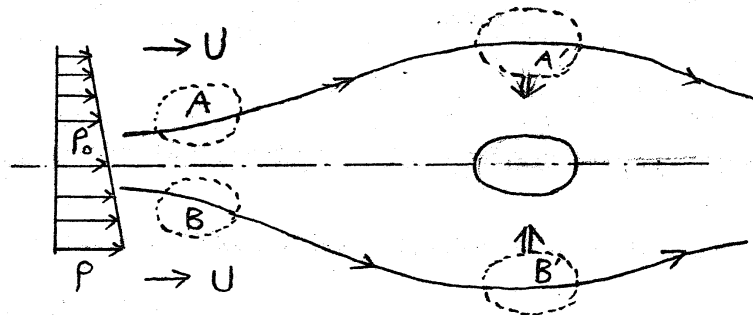


Fig. 2

る流体塊は流線によって動き A', B' の位置に到達したとする。このとき A' の流体塊は浮力のため下向きをうける力を受け、又 B' の流体塊は浮力のため上向きをうける力を受け、矢印 F_p の方向に運動をおこすであろう。 A', B' の流体塊は、大きさは同じで、方向は逆の力を受けると、この流体塊の運動を支配する因子は、この他 A', B' の質量とその付近の粘性係数であろう。

しかるに Boussinesq 近似^{では} A', B' の質量もその付近の粘性係数も同一とみなして解く近似であるから、Boussinesq 近似で取扱う限りにおいて、 A', B' の流体塊は $y=0$ の面に肉して対称に矢印 F_p の方向に運動するであろう。この運動のため物体周辺の流体は x 方向の流速をまし、したがって物体の抵抗は増

加する。しかも流れの対称性から揚力は働かない。

以上の議論は n が正の奇整数、 $\alpha > 0$ である場合にも全く同様に成立するから、この場合にも拮抗および揚力に関し同じ結論が得られる。

(ii) 別の方法による考察

次に物体に働く力について、別の方法で考えて見よう。まずはじめに、密度が一様な流体が Navier-Stokes 方程式にしたがって、対称物体のまわりを流れる場合を考えて見る。さてこの流れが下にかかれる Type 1 および Type 2 の対称性をもつ 2 つの流れだけで構成されることを示そう。

Type 1 の流れ : Fig. 3a で示されるような流れ、すなわち Stokes 近似のとき現われる流れで、対称性は次の型をもつ。

$$\bar{u} : (x^0, y^0, z^0), \quad \bar{v} : (x^1, y^1, z^0), \quad \bar{w} : (x^1, y^0, z^1), \quad \bar{p} : (x^1, y^0, z^0)$$

ここで z^0 suffix 0 は偶函数、suffix 1 は奇函数を表わす。この type の速度、圧力を V_1, P_1 で表わす。

Type 2 の流れ : Fig. 3b で示されるような、対称な流れで、その対称性は次の型をもつ。

$$\bar{u} : (x^1, y^0, z^0), \quad \bar{v} : (x^0, y^1, z^0), \quad \bar{w} : (x^0, y^0, z^1), \quad \bar{p} : (x^0, y^0, z^0)$$

この type の速度、圧力を V_2, P_2 で表わす。

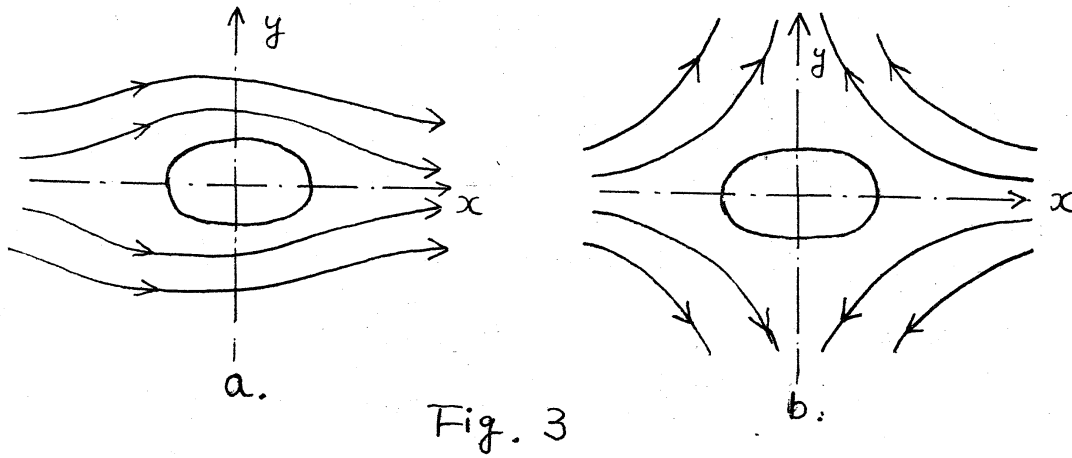


Fig. 3

さて $N-S$ 方程式の *non-linear* 項 $\bar{q} \cdot \nabla \bar{q}$ よりどのような対称性をもつ流れがでてくるであろうか。これを知るためには $V_1 \cdot \nabla V_1$, $V_1 \cdot \nabla V_2$, $V_2 \cdot \nabla V_1$, $V_2 \cdot \nabla V_2$ のベクトルの対称性を調べて見ればよい。その結果、これらの項はすべて V_1 又は V_2 と同じ対称性をもつことが分る。したがって $N-S$ 方程式は、さきに仮定されたような境界条件のもとでは、Type 1 と Type 2 の流れだけで矛盾なく構成されること分る。

さて §3 のはじめに述べられた成層流体の場合に話をもちよう。この場合には (9) ~ (11) の方程式系によって考えればよい。そのためには Type 1 の流れの \bar{P} として (x^0, y^0, z^0) の対称性を、又 Type 2 の流れの \bar{P} として (x^1, y^1, z^0) の対称性を仮定しよう。このとき $N-S$ 方程式の場合と同様に、 $\bar{q} \cdot \nabla \bar{q}$, $\bar{q} \cdot \nabla \bar{P}$, $\bar{P} \cdot \nabla \bar{q}$ の対称性を調べて、 n が正の奇整数であるときは、Type 1 および Type 2 の流れだけで矛盾なく構成されること

とを確かめることが出来る。したがってこの場合も、前述のよ
うな境界条件のもとでは、やはり Type 1 および Type 2 の
流れによって構成されることが分る。

さて Type 2 の流れは対称性によって物体に力を及ぼさな
く、又 Type 1 の流れからは抵抗を生ずることを知る事が
出来るから、以上の結果は、物体に揚力が働かないという前
記の物理的考察の結果と一致している。

§4. 特異攝動法による球のまわりの流れの解

ここでは静止状態での密度が $\rho = \rho_0(1 - \epsilon y)$ であり、かつ
対称物体が半径 a の球である場合を考へる。(9) ~ (12) によ
って支配される流れは、 Re , B の大きさによって種々変化す
ると思われ、以下においては $Re \ll 1$, $BRe \ll 1$ の場合を
考へる。今取扱りの便宜上 $B = \alpha Re^m$ とおき、特異攝動法に
よる展開の解の第 1 近似を求めようとする。

(i) inner expansion

オセーソ近似で予想されるように、inner solution の成り
立つ領域は $O(1)$ の範囲であり、第 0 近似は Stokes の解と
考へられる³⁾。これに続く解を Re^ϵ の order と仮定し、 $\bar{u}, \bar{p}, \bar{\eta}$,
 $\bar{v}, \bar{P} \in Re^\epsilon$ で展開する。ここで ϵ は outer solution と
の matching より決定される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= q_0(r) + R_0^\epsilon q_1(r) + \dots, \quad \bar{p} = p_0(r) + R_0^\epsilon p_1(r) + \dots \\ \bar{u} &= u_0(r) + R_0^\epsilon u_1(r) + \dots, \quad \bar{p} = p_0(r) + R_0^\epsilon p_2(r) + \dots \\ \bar{r} &= r \end{aligned} \right\} (14)$$

(14) を (9) ~ (11) に代入し、境界条件 (13) を考慮するとき、 q_0 , p_0 に対する方程式および境界条件は

$$\Delta q_0 - \nabla p_0 = 0 \quad (15)$$

$$\nabla \cdot q_0 = 0 \quad (16)$$

$$\text{at } r=1, q_0 = 0; \quad \text{at } r \rightarrow \infty, q_0 = i, p_0 = 0 \quad (17)$$

又 q_1, p_1, p_2 に対しては方程式および境界条件は

$$\Delta q_1 - \nabla p_1 = R_0^{1-\epsilon} q_0 \nabla q_0 + R_0^{m+1-\epsilon} \kappa p_1 \bar{q} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot q_1 = 0 \quad (19)$$

$$q_0 \nabla p_1 - u_0 = 0 \quad (20)$$

at $r=1, q_1 = 0$; at $r \rightarrow \infty, q_1, p_1, p_2$ は outer solution との matching を考慮して決定される。 (21)

(ii) outer expansion

outer solution の成り立つ領域は $O(R_0^{-\nu})$ と考えられる。又第 0 近似は一樣流で、これからのつづれを次の如く展開する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= i + R_0^\beta q_1'(r') + \dots, \quad \bar{p} = R_0^\sigma p_1'(r') + \dots \\ \bar{p} &= R_0^\delta p_1'(r') + \dots, \quad \bar{u} = R_0^\beta u_1'(r') + \dots \\ R_0^\nu \bar{r} &= r' \end{aligned} \right\} (22)$$

ここで $\beta, \sigma, \delta, \nu$ は未定の定数である

(22) を (9) ~ (11) に代入して、境界条件 (13) を用いて

$$\Delta' q_1' - R_e^{\delta-\nu-\beta} \nabla' p_1' - \alpha R_e^{m+1+\delta-\beta-2\nu} f_1' \vartheta - R_e^{1-\nu} \frac{\partial q_1'}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

$$\nabla' \cdot q_1' = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial p_1'}{\partial x'} = R_e^{\beta-\nu-\delta} v_1' \quad (25)$$

at $r \rightarrow \infty$, $q_1' = p_1' = f_1' = 0$;

at $r \rightarrow 0$, q_1', p_1' は inner solution q_0, p_0 との matching により決定される。 (26)

この matching 条件を調べるためには、 $r \rightarrow \infty$ での q_0, p_0 の解の性質を知る必要がある。(15) ~ (17) の解は Stokes の解として知られていて、 $r \rightarrow \infty$ のとき次の形をとる。

$$\left. \begin{aligned} q_0 &\sim \mathbf{i} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} \right) \mathbf{i} - \frac{3}{4} \frac{xy}{r^3} \mathbf{j} - \frac{3}{4} \frac{xz}{r^3} \mathbf{k} \\ p_0 &\sim -\frac{3}{2} \frac{x}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここで $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトルである。

$r' \rightarrow 0$ のとき、 q_1', p_1' は (28) の形をとる必要がある。

$$\beta = \nu, \quad \delta = 2\nu \quad (28)$$

又 (25) より

$$v = 0 \quad (29)$$

又 (23) で浮力の項と粘性項のバランスを考慮するとき

$$\nu = (m+1) / 3 \quad (30)$$

したがって $0 < \nu \leq 1$ と仮定すれば (23), (25) は

$$\Delta' \mathcal{B}'_1 - \nabla' \mathcal{P}'_1 - \alpha \mathcal{P}'_1 \mathcal{F} = R_2'^{1-\nu} \frac{\partial \mathcal{B}'_1}{\partial x'} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}'_1}{\partial x'} = \mathcal{V}'_1 \quad (32)$$

今簡単のために、以下において $0 < \nu < 1$, すなわち、
 $-1 < m < 2$ のときを考慮しよう。このとき

$$\hat{r} = \alpha^{\frac{1}{3}} r', \quad \hat{\mathcal{B}} = \alpha^{-\frac{1}{3}} \mathcal{B}'_1, \quad \hat{\mathcal{P}} = \alpha^{-\frac{2}{3}} \mathcal{P}'_1, \quad \hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}' \quad (33)$$

とあって、(31), (32), (24) は

$$\Delta \hat{\mathcal{B}} - \hat{\nabla} \hat{\mathcal{P}} - \hat{\mathcal{P}} \hat{\mathcal{F}} = 0 \quad (34)$$

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathcal{B}} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{P}}}{\partial \hat{x}} = \hat{\mathcal{U}} \quad (36)$$

境界条件は

$$\text{at } \hat{r} \rightarrow \infty, \quad \hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{F}} = 0 \quad (37)$$

$$\text{at } \hat{r} \rightarrow 0, \quad \left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{B}} &\sim -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{\hat{r}} + \frac{\hat{x}^2}{\hat{r}^3} \right) \hat{r} - \frac{3}{4} \frac{\hat{x} \hat{y}}{\hat{r}^3} \hat{\mathcal{F}} - \frac{3}{4} \frac{\hat{x} \hat{z}}{\hat{r}^3} \\ \hat{\mathcal{P}} &\sim -\frac{3}{2} \frac{\hat{x}}{\hat{r}^3} \end{aligned} \right\} (38)$$

(iii) 解

[I] outer expansion の 1 近似

境界条件 (37), (38) を満足する (34) ~ (36) 式の解を解析的に求めることがむづかしい。しかし全体の解の様子が分るべくして $\hat{r} \rightarrow 0$ の付近の解の性質が分れば、inner solution

\hat{g}_i, \hat{p}_i の境界条件がきまり、 \hat{g}_i, \hat{p}_i とくことかできるから、球に働く力も決定される。

以下において、フーリエ変換を用いて、 $\hat{r} \rightarrow 0$ の $\hat{g}, \hat{p}, \hat{p}$ の解の性質を調べてみる。⁴⁾

$\hat{g}, \hat{p}, \hat{p}$ のフーリエ変換を次式の如く、 Q, P, Λ とおく

$$\left. \begin{aligned} Q(k) &= \int e^{-ik \cdot \hat{r}} \hat{g} \, d\hat{r}, & P(k) &= \int e^{-ik \cdot \hat{r}} \hat{p} \, d\hat{r} \\ \Lambda(k) &= \int e^{-ik \cdot \hat{r}} \hat{p} \, d\hat{r}, & Q(k) &= Q_1(k) \hat{i} + Q_2(k) \hat{j} + Q_3(k) \hat{k} \end{aligned} \right\} (39)$$

境界条件 (38) をみたす解を求めたのには、(34) の代りに

$$\Delta \hat{g} - \nabla \hat{p} - \hat{p} \hat{g} = 6\pi \delta(r) \hat{i} \quad (34')$$

を用い、(34'), (35), (36) のフーリエ変換を作るとき、

$$\left. \begin{aligned} k^2 Q + ikP + \Lambda \hat{g} &= -6\pi \hat{i} \\ k \cdot Q &= 0, & ik_1 \Lambda &= Q \cdot \hat{j} \end{aligned} \right\} (40)$$

(40) とおいて

$$Q = \frac{6\pi(k_1 k_2 - k^2 \hat{i})}{k^4} - i \frac{6\pi k_1 k_2 (k_2 k_1 - k^2 \hat{j})}{k^4 \{k_1 k_1 + i(k_2^2 - k^2)\}} \quad (41)$$

$$P = i \frac{6\pi k_1}{k^2} + \frac{6\pi k_1 k_2^2}{k^2 \{k_1 k_1 + i(k_2^2 - k^2)\}} \quad (42)$$

$$\Lambda = \frac{-i 6\pi k_1 k_2}{k_1 k_1 + i(k_2^2 - k^2)} \quad (43)$$

Q, P, Λ が決定されたから、 $\hat{Q}, \hat{P}, \hat{\Lambda}$ は次の変換よりえける。

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}} Q d\mathbf{k}, & \hat{P} &= \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}} P d\mathbf{k}, \\ \hat{\Lambda} &= \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}} \Lambda d\mathbf{k} \end{aligned} \right\} (44)$$

(44) = (40) ~ (43) に代入して、 $r \ll 1, r \gg 1$ の性質を調べて、これらの解は境界条件 (37) を満足してゐることを分る。

又 $r \rightarrow 0$ の $\hat{Q}, \hat{P}, \hat{\Lambda}$ は次の形をとり

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q} &\sim -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{r} + \frac{\hat{x}^2}{r^3} \right) i - \frac{3}{4} \frac{\hat{x} \hat{y}}{r^3} j - \frac{3}{4} \frac{\hat{x} \hat{z}}{r^3} k + a + o(r) \\ a &= -\frac{i3}{4\pi^2} \int \frac{k_1 k_2 (k_2 k - k^2 j)}{k^x \{k_1 k^x + i(k_2^2 - k^2)\}} d\mathbf{k} = b i \\ b &= \frac{3}{\pi} \int_0^\infty \int_0^1 t^2 \left[\left(\frac{k^6 t^2 + 1}{k^6 t^2 + t^4} \right)^{\frac{1}{4}} \cos \left\{ \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \frac{t}{k^3} - \tan^{-1} \frac{1}{k^3 t} \right) \right\} - 1 \right] dt dk \\ &= 0.1463 \end{aligned} \right\} (45)$$

$$\hat{P} \sim -\frac{3}{2} \frac{\hat{x}}{r^3} + \text{const}, \quad (46)$$

$$\hat{\Lambda} \sim \frac{3}{4} \frac{\hat{y}}{r} + o(r) \quad (47)$$

\hat{Q}, \hat{P}, P の $r \rightarrow 0$ の積子が判明したので、今 inner expansion の第 1 近似をとりこゝから分る。

[II] inner expansion の第 1 近似

(45) の \hat{Q} の a が $r \rightarrow \infty$ における \hat{Q} に match するには必要な条件が

$$\epsilon = \nu \quad (48)$$

$$\nu = (m+1)/3, \quad 0 < \nu < 1 \quad \text{を考慮して } \lambda \text{ として, (18) ~ (20) は}$$

$$\Delta q_1 - \nabla p_1 = 0 \quad (49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_1 = 0 \quad (50)$$

$$\mathbf{q}_0 \cdot \nabla p_1 - U_0 = 0 \quad (51)$$

又境界条件は、(45) ~ (47) より

$$\text{at } r=1, \quad q_1 = 0; \quad \text{at } r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{q}_1 = \alpha^{1/3} b \mathbf{u}, \quad p_1 = 0 \quad \left. \vphantom{\text{at } r=1} \right\} (52)$$

$$p_1 = \frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(49) ~ (52) より

$$\mathbf{q}_1 = \alpha^{1/3} b \mathbf{q}_0, \quad p_1 = \alpha^{1/3} b p_0 \quad (53)$$

(i.v) 球の拮抗

Stokes の流れ \mathbf{q}_0, p_0 に対する拮抗の式、および (14), (30), (48), (53) を用いて、拮抗 D は

$$D = 6\pi \mu a U \left\{ 1 + b(\alpha Re^{1+m})^{1/3} + \dots \right\}$$

$$= 6\pi \mu a U \left\{ 1 + 0.1463 (BRe)^{1/3} + \dots \right\} \quad (54)$$

§5. 結論

$Re \ll 1$ の場合には、 $B = \sigma a^2 k / \nu^2 = \alpha Re^m$ とおいて、 $-1 < m < 2$ のときの解析を特異擾動法で行い、第1近似の

漸次式を得た。

第2, 第3近似を求めるためには, 同じ方法ですすめることができるが, ただ m の領域をさらに細分して取扱う必要がある。

又 $m=2$ の場合も, (3) で $\nu=1$ とおいて, 全く同じように計算ですすめることができることに注意しておく。

文 献

- 1) S. Martin & R.R. Long : J.F.M. 31 (1968), 669
- 2) R.E. Kelly & L.G. Redekopp : J.F.M. 42 (1970), 497
- 3) M. Van Dyke : Perturbation Methods in Fluid Mechanics (Academic Press, 1964), 153
- 4) S. Childress : J.F.M. 20 (1964), 305