

## 半無限平板を過ぎる非定常流

についで

テンプルズ大正教 徳田 尚之\*

### §1. 序

半無限平板を粘性流体中にインピュース的に板に沿ってある一定速度  $U$  で動かした場合に生じる非定常粘性流の問題を論じる。この問題は Stewartson が 1951 年に最初に論文を発表して以来多くの人にまじり研究されていいる。その代表的なものとしては Lam & Crocco (1958), 赤松と神元 (1966), Hall (1969), Donnio (1971) などがある。Lam & Crocco, Hall, Donnio の論文は Stewartson の考えに基づいた境界層式を用いたの数値解析があり、Stewartson が最初に予想した傾向を示している。

今迄この問題を扱った論文は総べて Navier-Stokes の式と近似した境界層の式に基づいていいる。本論文ではもと根本から問題を見直した。こゝで我々は Navier-Stokes の式はこの問題の

---

\* 現住所 東京都文京区南口 3-6-22, 301.

時間と空間を含めた全領域に亘り、 $\epsilon$  成り立つという事を前提として出発する。それらをその第一近似として境界層の式を導き、その近似の前提と反し、漸近展開法をまず示し、それに一致のある境界層の解を求めた。この漸近解は次の様な条件を満たさなければならぬ。

1. ある大きさ (又は小) のパラメータを用いて系統的に漸近解を求めなければならぬ。
2. この漸近解が厳格に意味を成り立つという為には、任意の高次項まで解を求めなければならぬ。
3. 各次の解はその近似に一致したオーダーのものでなければならぬ。

少なくも幾つか求める漸近解が正しいものである事を示すには、上の三つの条件を満たさなければならぬ。この事により、次章に述べる様な Stewartson を含んでいる色々な意味での物理的矛盾を説明する事が出来る。

## § 2. Stewartson の境界層式への解.

前録からの距離  $x^*$  が充分大きい所の流れを考える。  $U_{\infty}^2 \gg 1$  として、この問題で境界層の式が成り立つと仮定すると、平板上の非定常粘性流れの境界層の式は次の如く書ける。

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.2)$$

境界条件並びに初期条件は

$$y^* = 0, \quad u^* = v^* = 0 \quad (2.3)$$

$$y^* \rightarrow \infty, \quad u^* \rightarrow U \quad (2.4)$$

$$x^* \rightarrow 0, \quad u^* \rightarrow u_B \quad (2.5)$$

$$t \rightarrow 0, \quad u^* \rightarrow U \quad (2.6)$$

$$t^* \rightarrow \infty, \quad u^* \rightarrow u_B \quad (2.7)$$

ここで  $y^*$  は垂直方向距離で、 $u^*$  と  $v^*$  は  $x^*$ ,  $y^*$  方向の速度成分を示す。 $u_B$  は Blasius の流れを示す。

初期条件として瞬間  $t=0$  の時は流れは一様流であるべきだが、 $t \rightarrow 0$  の小さな瞬間の領域の中では、流れは無限平板の Rayleigh の解に近づく。又  $t \rightarrow \infty$  の場合はこの非定常解は定常解の Blasius の解に近づく筈である。

次の様に無次元変数を定義する。

$$\eta = y^* / \sqrt{\nu x^*}, \quad \tau = U t^* / x^*, \quad u = u^* / U, \quad \psi = \psi^* / \sqrt{\nu U x^*} \quad (2.8)$$

ここで  $\psi$  は無次元化した流れ関数である。(2.8)式の無次元変数を導入すると、今迄の三つの独立変数 ( $x^*$ ,  $y^*$ ,  $t^*$ ) から二つだけ ( $\eta$ ,  $\tau$ ) の中に変わる事に注意せよ。

$$(2 - \epsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial z} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \epsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (2.9)$$

境界条件は

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

$$\psi \rightarrow \psi_R, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

$$\psi \rightarrow \psi_B, \quad \epsilon \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

こゝに  $\psi_R$  は Rayleigh の解である。

今迄この問題を扱った人は, Stewartson, Hall 等を含めて  $\epsilon = 0$  の Rayleigh flow を指定し,  $\epsilon \rightarrow \infty$  で定常な Blasius 解を與へる様な放物型の初期値問題として取扱つてゐる。殊に Stewartson, Hall はこの放物型問題を熱伝達を多く出づる型の正則な初期値問題と同様に扱つてゐるが, 式 (2.9) を見て解る様に, この放物型の式は最高次の係数が  $\epsilon \geq 1$  の領域にありては, 符号を反転させる強い非線形性をもち, こゝに正則な放物式の解の性質を同一に取扱ふ事は又また疑問が生ずる。例之は Stewartson 等は (2.9) ~ (2.13) 式が数学的には適切な問題 (正確には Hadamard の定義による) と仮定し, 初期値の Rayleigh 解から定常解の Blasius 解まで連続な解の存在する事を仮定した。そうすると  $0 \leq \epsilon < \infty$  の領域では真性の非線形性は

連続性で認められるか、代数学的特異点は認められる事になる。何等かの特異点  $\tau = \infty$  と  $\tau = 0$  (または  $\tau = 1$ ) で存在しなければならぬ事は、この問題の解を Rayleigh または Blumino の解  $\psi$  の  $\tau$  又は  $\tau$  に対する中展開が不可能な事から了解される。  $\tau \rightarrow \infty$  の時、Stewartson は次の最も真性特異点をも、を解と求めた。

$$\psi(\eta, \tau) = \psi_B(\eta) + \frac{1}{\eta\tau} \frac{\partial \psi_B}{\partial \eta} g(\eta\tau) \exp\left\{-\frac{\partial^2 \tau^2}{9}\right\} \quad (2.14)$$

$\tau$ 、 $\tau$   $g$  は 1/2 次のベッセル函数で表わされる。(2.14)式は  $\tau \rightarrow \infty$  の極限において総べての数字的條件を満たしている。

更に Stewartson は  $0 \leq \tau \leq 1$  の領域では前線の乱れの影響のたつ事から、 $\tau = 1$  に於いて真性特異点が存在すべきだと考へてゐるか、この領域では今の所解析的な漸近解は求まらぬ。

著者の調べた範囲では、特異型放物式の解については、殆んどと云つて良い位代数学的解明はなされてゐる。従つてその正体は謎々つまつまわつてゐる状態にある訳だが、少なくとも、正則型の式と同視するといふ思ふは冷静に検討される直さなければと思ふ。如何なる解の存在又は唯一性の証明に於いてはこの最高次係は全領域に於いて正である事が不可欠である。例として Petrovsky (1955) に参照される。

又この Stewartson 的の観念は次の様に矛盾を含まれているのに注意せらる。よく知られている様に板状型式は常に散逸性を持つので  $\tau=0$  で生じた Rayleigh flow の乱れは、その増す方向に伝播して行くがこれは乱れが Rayleigh 領域から Blasius 領域に伝播する事を意味する。例えがある文より一定の時間についで流力を考えると、乱れは後方の Rayleigh 域から前方の Blasius 域の方向に、あるかそ流れのバクトルと反対の方向に伝播している事を意味している。これは物理的には矛盾している。これは境界層式には増す方向の拡散は無視されている筈、増す方向の伝播は流れのバクトル方向に沿うか存りかたである。

このり、この物理的矛盾が流れの発展を説明し得る解は、次の様に厳密に一貫性のある漸近解の枠内で求める事が出来る事を次に示す。

### §3. 漸近展開解.

境界層の式は、Navier-Stokes の式にある近似を行なう場合の漸近解の第一項である事はよく知られている。定常流で物体がある長さ  $L$  とする場合には、 $Re = \frac{UL}{\nu}$  の逆数を属角  $\epsilon$ 、 $Re \rightarrow \infty$  のリミットを取ると Navier-Stokes の式の第一近似として Prandtl

の境界層式がまゝ。所がこの問題の様に物体の長さが無限でしかも非定常流である場合に上記の定常流の解の様子一員性のある漸近解を求めるという事はまゝ行かぬ。第一上記のレイルズ数に対応するスミクス(又はホクス)パラメータが何であるかを解、ていねい。

第一に考へつくのは、前縁からの距離  $x$  を基に、

$$R_x = Ux^2/\nu \gg 1.$$

を用いて漸近展開を行ふ事であらう。これは Stewartson, Hall 等が境界層近似を正当化する時の手段であるが、このパラメータでは漸近展開は盲く行かぬ事がある。細く調べて解、て事は

$$R_t = U^2 t / \nu \quad (3.2)$$

というパラメータで展開する事がこの問題のキーである。 (3.2) 式の  $R_t$  は他と時間の尺度が同じ場合には唯一の無次元化時間と同様に、直ぐ解る様に前縁の乱れが流れるに依り流れる距離  $Ux$  を使、てレイルズ数である事に注意願ひたい。実はこの事から、この  $R_t$  は次の様子二つの重要な二つの物理的意味をもていり。例えば、 $R_t \rightarrow \infty$  という事は、運動を要する充分時間の経、て時々の問題という他に、この問題のレイルズ数が大きいとい、て事を意味す

する。大まか「時間と高」のレイアウト「教」の一見無関係の様に見える。この事実はこの問題を扱った人々には最初な不可解な印象を與える様であるが、実はこの事を正しく認識する事がこの大変難かしい問題を正しく理解する事のキーだと云える。この  $R_0 \rightarrow \infty$  の極限を取ると Navier-Stokes の式の厳密な漸近解は次の如く求まる。

$$\psi(x, y, R_0) = \psi_0(x, y) + \frac{1}{R_0^{1/2}} \psi_1(x, y) + \frac{1}{R_0} \psi_2(x, y) + \dots$$

$x, y \in \text{固定} (R_0 \rightarrow \infty) \quad (3.3)$

ここで  $x = \frac{x^*}{R_0}, y = \frac{y^*}{R_0}$  である。これは 2 章に於いて用いた  $x, y$  の逆数がある事を留意して頂きたい。(3.3) 式を Navier-Stokes 式に代入し、 $R_0$  の中々ついでまとめると、 $\psi_0$  を支配する式は (2.9) 式と一致し予想通り (3.3) 式の右辺は境界層の式となる。これは境界層の排除層の影響により生じる項で、これは定常の有限平板で Kuo (1954) の求めた二次近似に相当する。この項は定常の半無限平板の問題では零となり、最初の修正項は (3.3) の  $\psi_1$  の項からなる。筆者はこの問題を  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  を求め (3.3) 式による漸近解は正しい事を示した。詳細は徳田 (1971, Part I) に示したのだがここでは省略する。

この (3.3) の展開が正しいものなどの事実から式 (2.9)



$\varepsilon$  階の境界層の解  $\psi_0$  は (3.3) の展開と一貫したものでなければならず。例えが,  $\psi_0$  は  $O(1)$  のものしか含んでおらず  $O(R_t^{-1/2})$  のオーダーの解を含んでおらず。定常の事から Stewartson が  $x \rightarrow 0$  の近辺で Blasius 解からの擾動解として求めた指数函数を含む解 (2.14) は, 境界層の式より高次のものであり, 第一近似の解には含まれておらず。解を示す事が出来る。

境界層の式 (2.9) が成り立つのは,  $x=O(1)$  で  $R_t \rightarrow \infty$  にある時であるが,  $x \rightarrow 0$  にある場合でも  $x=O(R_t^{-\alpha})$ , 但し  $0 < \alpha < 1/2$  の定数, の速さで  $0$  に近づく場合には成り立つ。すると Stewartson の固有値解 (2.14) の  $f_1$  の速さは

$$f_1 = O\left\{\exp(-R_t^{3\alpha})\right\} \quad R_t \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

と成り  $0 < \alpha < 1/2$  の数であるので明らか  $f_1$  は  $R_t^{1/2}$  のオーダーより (実際には  $O(R_t^{-N})$ ,  $N$  は何れも正の定数より) 小さなものであり, 第一章で述べた考察により境界層近似よりも, と小さなオーダーのもので解る。我々の (3.3) 式の厳密な漸近解の枠内では, 境界層の解として不適当であると結論出来る。Hall 等の境界層の数値解として求め, 仮定した解と良く調べると必ず Stewartson の固有値解 (2.14) または (3.4) を含んでおり, Hall の解はルーズな意味では確かに境界層式の解になる。

こゝろが、以上の理由で、Navier-Stokesの式の厳密な漸近解の枠内では、境界層の解とは云々難い。若し(3.4)が境界層の解として使えないとすれば、 $x \rightarrow 0$ の近辺ではBlasiusの解はこの非定常境界層式の厳密解であるという重要な結論に達する。 $x \geq 1$ ではRayleighの解が成り立つ筈なので $0 < x < 1$ のある處で境目の変わる遷移處が存在する必要がある。このBlasiusの解からRayleigh解への遷移はこの問題の一番難解な處でもあり、これは徳田(1971, Part II)に詳しく述べてある。

### §3. 考察

以上の様な事から結論としては次の様な新しい事実が限られた。

1. 境界層近似は $R_\infty \rightarrow \infty$ の極限においてのみ成り立つ。
2.  $x \rightarrow 0$ の近辺では、Blasiusの解は非定常境界層式の厳密解である。 $x=0$ の近辺にBlasiusの解からRayleighの解に遷移する處が存在する。(徳田1971 Part IIを参照の事)。
3. 時間が大きい時に、最終的にBlasius解に近づくものの近づき方は、時間の途中である。今迄のKellyの stagnation flowの大きい時間の解、又Stewartsonの(2.14)式の解が総じて $t \rightarrow \infty$ では指数函数的に近づくものとは対照的である。

例えば、この様事象から次の様事象が解る。Stewartson  
 は  $\tau$  時間の変数として扱い、その増加する方向に問題を解  
 りながら、境界層の式では  $R_\tau \rightarrow \infty$  と  $\tau$  のリミットが既にとってあ  
 り、 $\tau$  時間の変数と扱う必要は全然ない。実際にはこの逆  
 数  $x$  を定常流での無次元距離変数の如く扱う方が正しい。  
 そうすると、(2.9) 式は  $x$  についての放物型の式になり、乱  
 れの伝播する方向は前縁から後方に向かうことになり、こうする  
 と物理的現象と合致する。勿論これには乱れのはずれが全く  
 逆伝わる事を前提としてゐる。この問題の正しい解は  
 $x=0$  で Blasius 解を指定 (初期条件として)  $x$  が増える方向  
 に向かう、 $\tau$  逐次解き、 $x \geq 1$  で Rayleigh flow に属する解を  
 求めなければならぬ。この問題の正しい見方は従って、 $\tau$  次  
 の様になる。最初の Navier-Stokes の式は時間  $R_\tau$  についての放物型  
 で  $R_\tau = \text{一定}$  の面は特性曲面となり、 $R_\tau = 0$  で生じた乱れは  $R_\tau$  の増  
 える方向に伝播して行く。 $R_\tau \rightarrow \infty$  の領域の特性曲面は境界  
 層近似が成り立つ。するとこの面上で  $x = \text{constant}$  の面が新  
 たなる特性曲面になり、この面では  $x$  の増加する方向 (前縁  
 から下流方向に向かう) に乱れは伝播する事になる。すなわ  
 ち、Navier-Stokes の式と、境界層の式の特性曲面  
 は数学的にも物理的にも全然意味が異なり、この両者は混用し  
 た事々今迄の解の欠点がある、たまたまと思われる。

尚本研究は筆者カイノブリッジ大学に滞在中に完成したもので、その由のLighthill, Batchelor 教授等の御厚意に感謝したい。

### 文献

Akemiatsu, K & Kemimoto, G. 1966. Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University

Dennis, S.C.R. 1971. Private Communication through Prof. Stewartson

Hall, M.G. 1969, Proc. Roy. Soc. A 310, 401-464.

Kuo, Y.H. 1953, J. Math. and Phys. 32, 83-101

Lam, S.H & Crocco, L. 1959, J. Aero. Sci. 26, 54-55

Petrowsky, I.G. 1954, Lectures on Partial Differential Equations, Interscience Publishers, New York

Stewartson, K. 1951, Quart. J. Mech., 4, 182-198.

Tesi, I. 1971, Presented UTAM Symposium.

Tokuda, N 1971 Part I & Part II, Submitted J. Fluid Mechanics.