数理解析研究所講究録
165巻 1972年 69-78

コホモロジー群の有限性についての基本原理

——線型微分方程式論の大域的理論への序論的考察——

京大・数理研　河合隆裕

線型微分方程式論はここ2,3年の間に面目を一新した。(佐藤・河合・柏原[1], 河合[1]~[3], Hörmander[2]) その最大の原因は"cotangent bundle上での解析"という一つのprincipleが佐藤のmicrofunction, Maslov-EgorovのFourier積分作用素の理論で確立されたからである。ただ現状ではその解析は多く未だ局所理論に止っている。その一つの理由は"(基本)解の'一意性'"の無さにある。実際方程式が双曲型に"近ければ近い程"大域的理論は容易である。(例えば河合[4]~[6]参照) 私にとっては今楕円型方程式が一番難しい。実際,楕円型方程式の基本解を大域的に構成する如何なる方法を我々は持つのか? 一意性を回復させるべくGreen函数を経由

してそこに行きつくべきなのだろうが。

しかし不本意ながら函数解析的手法を用いることを自らに許すならば、我々は現在の時点において既に次の (Meta) theorem を perceive することが出来る。

<u>Metatheorem</u> "解層係数のコホモロジー群の有限性" $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{(a) 楕円性} \\ \text{(b) 境界での"双曲性"} \end{cases}$.

実際、今迄に知られている "指数有限" という定理は殆んどすべてこの原理により理解できる。たとえば、コンパクト多様体上の楕円型作用素の時 (b) は trivial に成立し通常の楕円型境界値問題の時は "reflection" により '本質的には' (b) が満たされる。(たとえば Hörmander [1] の結果を参照せよ。あるいは境界値問題も本質的には特性曲面の構造を考慮した初期値問題であると思ってよい。Cf. 小松-河合 [1]) 又 Schapira の複素領域での指数有限な作用素

の例というのはこの原理の最も簡単な場合である。
ここで注意すべきは (a), (b) 共に局所的性質である点である。従って我々の精神的目標は次の条件 (c) を見付けることである。

◎ (a) ⊕ (b) ⊕ (c) $\Longrightarrow$ コホモロジー群の有限性!

我々は未だ (c) として線型位相空間論しか持っていないのである。コホモロジー論は局所的性質と大域的問題を結ぶ鍵だと称しながら……。

本講演では主に (a) について考え，時間が許せば (b) について議論する。特に (a) として所謂 analytic-hypoelliptic —— 嫌な用語だが —— な物を取り上げる。又，$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 等に sheaf homomorphism として作用する線型微分作用素の指数をこのように捕えることは自然だが，実は擬微分作用素 $\mathfrak{P}$ に対しても底空間 M がコンパクトの時

$$\mathcal{B}(M) \xrightarrow{\ \mathfrak{P}\ } \mathcal{B}(M), \quad \mathcal{A}(M) \xrightarrow{\ \mathfrak{P}\ } \mathcal{A}(M)$$

なる写像が well-def.（かつ連続）なることに注意しよう。しかし，勿論これについては一見コホモロジー理論は使えず，従って Th.'s 1, 2 のような議論は不可能に思える。だが，（私にとっては）

驚くべきことに $\mathcal{P}$ が楕円型の時, その指数の有限性は $\mathcal{P}$ の $\mathcal{C}$ (又は $\mathcal{B}/\mathcal{A}$) での作用 —— それは sheaf homomorphism である —— を利用して単に初等代数及び双対性の議論により導き出せるのである。今又 "Sobolev 空間の議論の有効性" の例証は一つがその輝きを失った………。

以下の定理はすべて C^∞ の範囲で考える(多様体, 作用素の係数等)。又, 多様体は向き付けられているとし, これも一々言わない。

<u>Theorem 1.</u> $P(x, \partial/\partial x)$ をコンパクト多様体 M 上の線型微分作用素であって条件 $(NT)_{f,(x,\xi)}$ が S^*M のすべての点 (x,ξ) で成立しているとする。この時 Index $(P: \mathcal{B}(M) \longrightarrow \mathcal{B}(M)) < \infty$

(条件 $(NT)_{f,(x,\xi)}$ については 河合 [2] Definition 1.5 参照)

<u>Theorem 2.</u> $\{P_j(x, \partial/\partial x)\}_{j\geq 0}$ は コンパクト多様体 M 上の 線型微分作用素系であって次の条件(1),(2)が満たされるとする

(1) $\{P_j\}$ により 解層 $\mathcal{A}^{P_0} = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の $\mathcal{A}$

による分解が与えられる。

(2) $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^{j}(\mathcal{M}, \mathcal{B}/\mathcal{A}) = 0 \quad j = 0, \cdots, k$

この時

$\dim_{\mathbb{C}} H^{j}(M, \mathcal{A}^{P_0}) < \infty \quad j = 0, \cdots, k$

特に

$P_j(x, \partial/\partial x)\,\mathcal{B}(M), \quad P_j(x, \partial/\partial x)\,\mathcal{A}(M)$

は各々 $\mathcal{B}(M)$, $\mathcal{A}(M)$ 内で閉である。

Remark. 条件(1) は Cauchy-Kowalevsky の定理により，解析的には厳しい条件ではない。条件(2) については 佐藤-河合-柏原 [1] 参照。

Theorem 3. $\Psi(x, \partial/\partial x)$ を，核函数 $K(x, y)dy$ (dy: Mの体積要素) により与えられる擬微分作用素であって (i.e., $S.S.\, K(x, y) \subset \Delta^a \subset S^*(M \times M)$) 局所的に 柏原-河合 [1] Definition 2 に与えられた形の展開を持ち，更にそれが，楕円型であるとする。この時 $\mathrm{Index}(\Psi : \mathcal{B}(M) \longrightarrow \mathcal{B}(M)) < \infty$

Remark. これも (Theorem 2 と同じく) もし，擬微分作用素，系による semi exact 列が $\mathcal{B}(M)$, $\mathcal{A}(M)$ に

対して与えられているなら その複体のコホモロジー群の有限次元性という形に拡張される。その時 特に各擬微分作用素系は閉値域を持つ。

以上の定理達の証明は まず局所理論により

$$[\mathcal{B}(M)]^{P_j} \Big/ P_{j-1}[\mathcal{B}(M)] \cong [\mathcal{A}(M)]^{P_j} \Big/ P_{j-1}[\mathcal{A}(M)]$$

という同型を証明し、次に (D)FS 空間の理論 (たとえば 小松[1] Ch. 4. §3 参照。ただし途中必要とする補題 (Grothendieck) が一つ同書にはない。それは Grothendieck [1] p.16 Théorème A 参照) 特に Serre の補題の付近を用いることにより与えられる。Theorem 3 の system の時の証明はやや技巧的である。尚 Theorem 3 の証明に際してはまず $\mathcal{P}(x, \partial/\partial x)$ が $\mathcal{A}(M) \longrightarrow \mathcal{A}(M)$ 及び $\mathcal{B}(M) \longrightarrow \mathcal{B}(M)$ への作用素として連続であることを示しておかねばならぬが、これは microfunction の理論と Robertson - Robertson の閉グラフ定理により容易に与えられる。

追記：Metatheorem 中の条件 (b) について一言触れておく。条件 (a) を考慮すると我々は十分条件 (b) の代りに次の条件 (b′) を用いてもよい。

(b′) 線型微分方程式系 $\mathfrak{M}$ から $\partial\Omega$ へ"誘導された" $\partial\Omega$ の(擬)微分方程式系 $\mathfrak{N}$ が楕円型である。

実際、それは、条件 (a) により $\partial\Omega$ は $\mathfrak{M}$ に関して非特性的，従って小松-河合 [1] の結果により話を $\mathfrak{N}$ に持ち込めるからである。ここで注意すべきは条件 (b′) は $\partial\Omega$ という部分多様体上で考えられていることである。

尚，最近の Zerner の正則解の延長に関する結果 (C.R. 272, pp. 1646–1648 (1971)，これが Schapira の議論の"解析的"部分である) は上の"誘導された"という語を最も trivial に (i.e. 微分方程式系の範囲で代数的に —— 広中先生の言を借りれば" calculus の範囲で) 解釈すること (と通常の Cauchy-Kowalevsky の定理) のみにより得られることを注意しておく。(Leray 流の精密な評価は不要である！)

条件 (a), (b) (or (b′)) を満たす方程式系の幾何学的研究は極めて魅力的に私には今思える。

例えば 条件 (a), (b′) を満たす系 について Lefschetz - Atiyah - Bott 型の fixed point formula が成立つことは見易い。では指数定理の形の物は得られないか？ それは 指数とは何か，という反省から始めねばなるまい。それは新しい K-理論を要求するのかも知れぬ……。見果てぬ夢である。

— 文　献 —

Grothendieck, A.: [1] Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. A.M.S. 16. 1955.

Hörmander, L.: [1] On the regularity of the boundary problems. Acta Math. 99, 225-264 (1958)

—— [2] Fourier integral operators. Acta Math. 127, 79-183 (1971)

Kashiwara, M. and T. Kawai: [1] Pseudo-differential operators in the theory of hyperfunctions, Proc. Japan Acad. 46, 1130-1134 (1970)

Kawai, T.: [1] Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients (I). To appear in Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 7 (1971)

—— [2] Ibid (II). Ibid.

—— [3] A survey of the theory of linear (pseudo-) differential equations from the view point of phase functions. Reports of the symposium on the theory of hyperfunctions and differential equations. R.I.M.S. Kyoto Univ. Kyoto, 1971, pp. 84-92 (In Japanese)

—— [4] On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations. I. Proc. Japan Acad. 47, 537−540 (1971)

—— [5] Ibid. II. Ibid. 643−647 (1971)

—— [6] On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations. Reports of the symposium on the theory of hyperfunctions and analytic functionals. R.I.M.S. Kyoto Univ. Kyoto, 1971.

Komatsu, H.; [1] 佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式, 東大セミナリーノート 22, 1968.

Komatsu, H. and T. Kawai [1] Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equation. Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 7, 95−104 (1971)

Sato, M., T. Kawai and M. Kashiwara [1] On pseudo-differential equations in hyperfunction theory. To appear in Proc. A.M.S. symposium on the theory of partial differential equations.