

Derivation and Automorphisms of operator algebras II

奈良高尙　北川誠之助

§1 疎

本講演は

Kadison, Lance and Ringrose

Derivation and Automorphisms of operator algebras II

Journal of functional analysis 1967, II

を紹介する

Kadison Ringrose: たとえばの論文 I における automorphism

group は norm 1 つ topology すなはち, connected component, etc の

論文 I で述べる。本論文においては, C^* -algebra に対する

derivation の inner に対する条件を論じている。

§2 記号及び定義

 \mathcal{A} : \mathbb{R} 上に働く C^* -algebra $\overline{\mathcal{A}}$: \mathcal{A} の weak closure δ : \mathcal{A} の derivation $\bar{\delta}$: \mathcal{A} の $\overline{\mathcal{A}}$ への拡張~~像~~とする。 $\|\delta\| = \|\bar{\delta}\|$ (未知) である []ここで δ が derivation であるとし,

$\delta : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$: linear mapping.

$$\mathcal{O} \ni A, B, \quad \delta(AB) = A\delta(B) + \delta(A)B$$

$$\text{特に } \delta \text{ が } *-\text{derivation} \Leftrightarrow \delta(A^*) = \delta(A)^*$$

$$\delta = \text{inner-derivation} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{O} \text{ s.t. } \delta(B) = \text{ad}(A)(B) = AB - BA \text{ for } B$$

$\S 3$ derivation.

[1] [2] $\mathcal{O} = \mathbb{C}^n$ の $\overline{\partial}$ は \mathcal{O} における inner-derivation であることを示すことを次の定理 1 の精密化である。

定理 1 $\delta = \mathcal{O}$ の $*$ -derivation.

\Rightarrow 次のよろち性質を持つたとえ self-adjoint operator H が $\overline{\partial}$ に一意的に存在する

i) $Q = \text{往還} \circ \text{central projection}$.

$$\frac{1}{2} \|\overline{\partial}(\overline{\partial}Q)\| = \|H(QH)\|$$

$$\|H(QH)\| = \sup_{\|Qx\| = \|x\| = 1} (Hx, x) = \inf_{\|Qx\| = \|x\| = 1} (Hx, x)$$

ii) $\overline{\delta} = i \text{ad } H$

« proof »

$d_t = e^{t\overline{\delta}}$ は $\overline{\delta}$ の inner $*$ -derivation である, d_t は $\overline{\partial}$ の inner automorphism である. $|d_t| = \sqrt{1+t^2}$ は norm-continuous automorphism である. 十分 小さな t で d_t は \mathbb{C} の $\|d_t - I\| < 2$ を満足する.

[1] Lemma 5 k'), d_t は implement である, unitary operator かつ次の性質を満たすに取れる

$$\text{Sp}(\bar{U}_t) \subset \{z = \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}\sqrt{4 - \|d_t - I\|^2}\}$$

従つて $U_t = e^{iB_t} \in \mathcal{D}$, $B_t = \text{self-adjoint in } \mathcal{H}$

$$\|B_t\| \leq \tan^{-1} \frac{\|d_t - I\|^2}{\sqrt{4 - \|d_t - I\|^2}} \quad t \text{ 満足す}$$

$$d_t = e^{i \operatorname{ad} B_t} = e^{t \bar{\delta}} \quad t \cdot i \operatorname{ad} \frac{B_t}{t} = \bar{\delta}$$

$$\left\| \frac{B_t}{t} \right\| \leq \frac{1}{t} \tan^{-1} \frac{\|d_t - I\|^2}{\sqrt{4 - \|d_t - I\|^2}} \leq \frac{1}{t} \frac{\|d_t - I\|}{\sqrt{4 - \|d_t - I\|^2}} \leq \frac{1}{t} \frac{(e^{t \|\bar{\delta}\|} - 1)}{\sqrt{4 - \|d_t - I\|^2}}$$

$$\therefore t \rightarrow 0$$

$$\left\| \frac{1}{t} B_t \right\| \rightarrow \frac{1}{2} \|\bar{\delta}\|$$

$$\frac{1}{2} \|\bar{\delta}\| < k \quad \exists B_k = \text{self-adjoint s.t. } i \operatorname{ad} B_k = \bar{\delta}, \|B_k\| \leq k.$$

$\therefore B_k = \{B = i \operatorname{ad} B = \bar{\delta}, \|B\| \leq k\}$ weakly-closed compact.

$$\therefore \bigcap_{\frac{1}{2} \|\bar{\delta}\| < k} B_k \neq \emptyset \quad \text{すなはち } {}^3 B = \text{self-adjoint at } i \operatorname{ad} B = \bar{\delta} \quad \|B\| \leq \frac{1}{2} \|\bar{\delta}\|$$

又, $\|B\| \geq \frac{1}{2} \|\bar{\delta}\|$ は容易にわかる (以上より).

${}^3 B = \text{self-adjoint operator, at } i \operatorname{ad} B = \bar{\delta} \quad \|B\| = \frac{1}{2} \|\bar{\delta}\|$

がわかる。

$\lambda = \{P_i\}$: finite central projections s.t. $\sum P_i = I$, $P_i \perp P_j$ ($i \neq j$)

$\{P_i\} \subset \{Q_j\} \Leftrightarrow$ 任意の Q_j は必ず P_i の sub projection

$\{H(Q_j)\} = \|HQ_j\| = \frac{1}{2} \|\bar{\delta}|_{\bar{\delta} Q_j}\|, i \operatorname{ad} HQ_j = \bar{\delta}|_{\bar{\delta} Q_j}, H(Q_j) \text{ self-adjoint}$

前の議論より 容易にわかる, weakly compact である。

$$\therefore \bigcap_{Q_j} \{H(Q_j)\} \neq \emptyset.$$

よって, $\bigcap_{Q_j} \{H(Q_j)\} \ni H$ が定理の性質を満たすことは容易にわかる

q.e.d.

次に δ -derivation δ の inner なたるための十分条件を今見よ。

以下 証明 は容易なので省略する。

反例 1-2 \mathcal{H} = separable Hilbert space

$C(\mathcal{H})$ = \mathcal{H} の compact operator の全体

- i) $\exists t \neq 0$ s.t. $\|\pi\delta\| < \pi$ 且 $\delta t = e^{it} \delta$ inner \Rightarrow δt implement δ な unitary operator $U \in \text{sp } U \subset \{z = \text{Im } z > 0\} \cap \{\bar{z}_2 + i \bar{z}_3 \geq 0\}$. δt inner.
- ii) $\|\delta\| < 2\pi$ で δ の faithful representation $\pi: \mathcal{H}/\pi(\mathcal{H}) \rightarrow \overline{\pi(\mathcal{H})}$ の center を満足するものが存在し、 e^δ が inner automorphism となる。すなはち $\pi = \pi \circ \delta$.

[例] $a = \lambda I + (\delta)$: λ = scalar, δ は δ の center

δ = infinite dimensional projection とす。

$\delta = i \text{ad} \pi(1-2E)$ は outer derivation τ .

$$\|\delta\| \leq \pi \|1-2E\| \leq 2\pi.$$

$V: x \mapsto Vx$, $Ex = x$, $(1-E)Vx = Vx$ は one-dimensional

projection とす

$$\|\pi \text{ad}(1-2E)V\| \geq \pi \|((1-2E)Vx - V(1-2E)x)\| = 2\pi.$$

$$\therefore \|\delta\| = 2\pi.$$

$$e^\delta(A) = e^{\pi \text{ad}(1-2E)}(A) = e^{\pi(1-2E)} A e^{-\pi(1-2E)} = A.$$

$\therefore e^\delta = \text{inner automorphism}.$

iii) α separable τ :

$\beta_t = e^{t\delta} \alpha$ inner automorphism \Leftrightarrow uncountable $t \in \mathbb{R}$:

δ inner.

$\tau = \tau'$ or τ' non separable の場合は成り立つ。又 α non separable

$\beta_t = \alpha_t = e^{t\delta} \alpha$ inner automorphism \Leftrightarrow countable $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}(t_n)$.

例) $f_{n+1} = f_n \quad (n=1, \dots), E_n = E, [f_n]:$ infinite dimensional proj. ($n=1, \dots$)

$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n + \lambda_{n+1}(1-E_n) + c_n \quad (c_n \in C(f_n), \lambda_n = \text{scalar})$: non separable.

$\alpha' = \sum \lambda_n I_n = \lambda_n = \text{scalar}$

$\alpha \cap \alpha' = \sum \lambda_n I_n = \lambda = \text{scalar}$ わかる。

$H = \sum (1-E_n)$ とすると $\delta = i \operatorname{ad} H$ は outer derivation \Leftrightarrow 容易にわかる。

$$e^{t\delta} A = e^{it \operatorname{ad} H} A = e^{itH} A e^{-itH}.$$

$$e^{itH} = \sum \{ e^{int} I_n \}$$

$$Z = \sum \{ e^{int} I_n \} \in \alpha' \quad \text{且} \quad Z e^{itH} = \sum \{ e^{int} E_n + e^{i(n+1)t}(1-E_n) \}$$

とすると $Z e^{itH} \in \alpha$. つまり $e^{t\delta}$ は α の t に対する inner automorphism を定義する。

以上 $\tau = \tau'$. α non separable \Leftrightarrow iii) は成立(る)。

例)

$$\alpha_1 = \sum \{ c_n : \|c_n\| \rightarrow 0, c_n \in C(f_n) \} \subset \sum \{ E_n + e^{int}(1-E_n) : t = \text{rational} \}$$

生成する C^* -algebra となる。 α_1 は separable C^* -algebra

$$\delta = i \operatorname{ad} H = i \operatorname{ad} \sum \{ (1-E_n) \} \quad (\text{H outer } \Leftrightarrow t_n).$$

有せたる α, γ, δ 但し α は [例2] の α , $\alpha' = \{\sum \beta_n I_n\}$

β_n が inner な S^* で $H \in \alpha + \alpha'/\subset \alpha + \alpha'$ が α に属する inner に
て [例2] の結果に反する。

$\{t = e^{i\theta} : \text{inner}\} \cup \{\text{反対に } F'\}$ countable

$\{t = e^{i\theta} : \text{inner}\} \cup \{\text{countable } t : S^* \text{ に成る } t\}$.

§4.

$\tau = T|H$, $I_0(\alpha) = \{\alpha \oplus \text{inner automorphism}\}$, $\Delta_0(\alpha) = \{\alpha \oplus \text{inner-deviation}\}$
が, norm は閉じた closed なための条件を満たす。

$\Delta(\bar{\alpha}) = \{\bar{\alpha}\}$ の deviation, norm は閉じた Banach space であることを示す。

定理2. 2) の 3 条件は同値。

i) $\Delta_0(\alpha)$ は closed

ii) $\beta = \alpha \oplus \text{center}$

$\beta = \bar{\alpha} \oplus \text{center}$

$\exists k > 0$ 且 $d(A, \beta) \leq k d(A, \beta)$ for $\forall A \in \alpha$

但し $d(A, \beta)$ は A が β への distance

iii) $d(U, U(\beta)) \leq m d(U, U(\beta))$ for $\forall U \in U(\alpha)$

但し $U(\alpha), U(\beta) \cup U(\beta)$ は α, β, β の unitary operator の全体

ii) α 且 iii) より次の iv) が得出。又 α が separable な S^* 。

i) ~ iv) は同値。

iv) $I_0(\alpha)$ は closed.

«proof» を正明する $i) \Rightarrow ii)$ のみを示す。

[1] すなはち $\bar{\Omega}$ の derivation が unique であることを示す。

$\bar{\Omega}/\mathfrak{z}_1 \longrightarrow \Delta(\bar{\Omega}) = \text{conti onto, 由る closed graph theorem から}$

$$\bar{\Omega}/\mathfrak{z}_1 \cong \Delta(\bar{\Omega})$$

Ω の derivation は $\bar{\Omega} \cap$ unique isometry は $\bar{\Omega}$ に張り付く。

$$\Delta_0(\Omega) \longrightarrow \bar{\Omega}/\mathfrak{z}_1 \cong \Delta(\bar{\Omega})$$



$$\Omega/\mathfrak{z}_1$$

且つ Ω/\mathfrak{z}_1 が conti である

条件 $i)$ $\Delta_0(\Omega)$ は closed である。 $\Omega/\mathfrak{z}_1 \cong \Delta_0(\Omega)$, 上の mapping は

Ω/\mathfrak{z}_1 は $\bar{\Omega}/\mathfrak{z}_1$ の closed set であるから Ω/\mathfrak{z}_1 は closed graph theorem から

必ず conti. すなはち $ii)$ が成り立つ。

$= 2$: Ω が non separable では $i) \Rightarrow iv) \Rightarrow iii)$ が成り立つ。これを示す。

例 4] 記号は例 2] と同じ。

例 2] に $i), ii), iii)$ 注意したが Ω の center = $\{\lambda \sum \theta_i I_n : \lambda = \text{scalar}\}$

$\bar{\Omega}$ の center = $\{\sum \theta_i \lambda_i I_n : \lambda_i = \text{scalar}\}$

$$U_k = \sum \theta_i \exp \frac{i \pi n}{k} E_{ii} + \exp \frac{(k+1)\pi}{k} (1 - E_{ii}) \in \Omega \quad \text{とする}$$

$$d(U_k, \mathfrak{z}_1) \geq 1 \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$d(U_k, \mathfrak{z}_1) \leq \left| \exp \frac{i \pi n}{k} - 1 \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

従って $iii)$ が満足 ではない。

$$\therefore U = \sum \{\lambda_n E_{ii} + \lambda'_n (1 - E_{ii}) + c_n\} = \sum \theta_i U_i, |\lambda_n| = |\lambda'_n| = 1, c_n \in \mathbb{C}(I_n) \quad \text{の}$$

unitary operator ($=E$) under τ to $\bar{\tau}$ or automorphism δ to

$$\begin{matrix} \text{to } \bar{\tau} \\ \text{to } \bar{\delta} \end{matrix} \quad C_n = \prod_{r=1}^n \lambda_{k-r}^* \lambda_r^* \quad V_n = C_n U_n \quad V = \sum V_n \in \mathcal{O}$$

$\tau(\tau^{-1}) = \tau(E)$, $\delta(\delta^{-1}) = \delta(U)$

$$O_n = \lambda E_n + (1-\lambda)(1-E_n) + C_n, \quad \lambda, \lambda' = \text{scalar}, \quad C_n \in C(\mathbb{H}_n), \quad \text{上に述べた } \tau, \delta$$

O_n automorphism δ to $\bar{\delta}$ $\Leftrightarrow \lambda = \overline{\lambda} d_n, \quad d_n \in O_n$
 $\bar{\delta}$ to δ $\Leftrightarrow \lambda = \lambda' d_n, \quad d_n \in O_n$

O_n is separable \Leftrightarrow iv) \Leftrightarrow iii) \Leftrightarrow O_n center = $\overline{O_n}$ center

$\Rightarrow \lambda I : \lambda = \text{scalar} \Leftrightarrow O_n$ is iv) \Leftrightarrow O_n is τ -separable, δ to $\bar{\delta}$ \Leftrightarrow O_n is δ -separable.

O_n is iv) \Leftrightarrow O_n is τ -separable.

non separable \Rightarrow i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow $\delta \neq \bar{\delta}$. \quad q.e.d.

Reference

- [1] Kadison and Ringrose ; Derivations and automorphisms of operator algebras I Communication Math ph. 4 (1967)
- [2] Sakai ; Derivations of W^* -algebras, Ann. Math 83 (1966)
- [3] Dixmier ; "Les C^* -algebras et leurs représentations" Gauthier-Villars
- [4] Dunford and Schwartz "Linear operator I" New-York