

ある種の C^* -algebra の
automorphism groupについて

東工大 理 生 西 明 夫

目 序

ここでは次の論文を紹介します。

Smith, M. B., On automorphism groups of C^* -algebras,
Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 623-648.

C^* -algebra $C(X) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (X は compact space) の automorphism は Kadison, Ringrose [1, IV. Example d] によって, Hilbert space \mathcal{H} が有限次元の場合が研究されている。

Smith のこの論文は, \mathcal{H} が無限次元の場合を扱ったものである。また, Lance [2] が同じ結果を独立に得ています。

主要な結果は次の二つです。

定理 1 $\text{loc-Inn}(C(X; \mathcal{L}(\mathcal{H}))) \cong C(X; \text{Aut}(\mathcal{L}(\mathcal{H})))$

ここで, $\text{Aut}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の *-automorphism の全体で,
 $\text{loc-Inn}(C(X; \mathcal{L}(\mathcal{H})))$ は次節で定義します。

定理 2 \mathcal{H} が無限次元ならば,

$$\text{loc-Inn}(\mathcal{O})/\text{Inn}(\mathcal{O}) = \check{H}^2(X; \mathbb{Z})$$

ここで、 $\mathcal{O} = C(X; L(\mathcal{U}))$, $\text{Inn}(\mathcal{O})$ は \mathcal{O} の inner*-automorphism 全体, $\check{H}^2(X; \mathbb{Z})$ は整数環 \mathbb{Z} に係数をもつ X の 2nd Čech cohomology group である。

定理 2 によって、 \mathcal{O} の次元が有限と無限の場合では本質的な違いがあることがわかる。

§ 2. Locally inner automorphisms.

以後、 \mathcal{B} は \mathcal{U} 上の単位元をもつ C^* -algebra, X は compact space, $\mathcal{O} = C(X) \otimes \mathcal{B} = C(X; \mathcal{B})$ とする。

$CF(\mathcal{O})$ は \mathcal{O} の center-fixing*-automorphisms の group とする (i.e., $\alpha(x) = x$ ($x \in Z(\mathcal{O})$))。

また, $e : X \times C(X; \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ と $e_t : C(X; \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ を 次のように定義する. $e(t, f) = f(t)$, $e_t(f) = f(t)$.

e_t について次の有用な補題を得る。

補題 1. $\alpha \in CF(\mathcal{O})$ ならば, $\alpha(\ker e_t) \subset \ker e_t$.

S を X の closed set とする。このとき, Tietze の拡張定理により, *homo $C(X; \mathcal{B}) \ni f \mapsto f|_S \in C(S; \mathcal{B})$ は onto である。このようにして次の定理は well-defined である。

定義. $\alpha \in CF(X; \mathcal{B})$ と X の closed set S に対して,

$$\alpha|_S(f) = \alpha(F)|_S \quad (f \in S; \mathcal{B})$$

ここで, $f \in F \in C(X; \mathcal{B})$. 明らかに, $\alpha|_S \in CF(C(S; \mathcal{B}))$.

定義. X の open covering $\{S_1, \dots, S_n\}$ があり、各 $\alpha|_{S_i}$ が inner であるとき、 $\alpha \in CF(\mathcal{A})$ は locally inner であるといい、このような α の全体を $loc\text{-}Inn(\mathcal{A})$ とする。

容易に、 $loc\text{-}Inn(\mathcal{A})$ は group であり、 $Inn(\mathcal{A})$ はその normal subgroup であることがわかる。

定義. $\alpha \in CF(\mathcal{A})$ と $t \in X$ に対して、 $\tilde{\alpha}_t: B \rightarrow B$ を $\tilde{\alpha}_t(B) = \alpha(\tilde{B})(t)$ 。ここで、 \tilde{B} は B を値にとる定值関数、すなわち、 $I \otimes B$ 。また $\tilde{\alpha}: t \mapsto \tilde{\alpha}_t$ とする。

$\alpha, \beta \in CF(\mathcal{A})$, $t \in X$ のとき、補題 1 によると、 $\tilde{\alpha}_{\beta t} = \tilde{\alpha}_t \tilde{\beta}_t$ であるので $\tilde{\alpha}_t$ は B の *-automorphism である。

定理 3. X を compact space, H を Hilbert space, $B = L(H)$, $\mathcal{A} = C(X; B)$ とする。このとき、 $\alpha \in loc\text{-}Inn(\mathcal{A})$ であるための必要十分条件は $\tilde{\alpha}: X \rightarrow Aut(B)$ が連続であることである。

定理 3 を証明するためには、次の二つの補題と、 $L(H)$ の unitary group U が canonical hom. $p: U \rightarrow U/S^1$ に関して U/S^1 上の fibre bundle であることを必要とする。ただし、 S^1 は U の center で circle group である。

補題 2. B が von Neumann algebra, U を B の unitary group, $Z(U)$ を U の center とする。このとき, canonical isomorphism $U/Z(U) \cong Inn(B)$ は topological group となる。

しても isomorphism である。

補題3. X を compact space, \mathcal{H} を Hilbert space, B を \mathcal{H} 上の単位元をもつ C^* -algebra, \mathcal{U} を B の unitary group とする。このとき, $\alpha \in \text{Inn}(\mathcal{U})$ であるための必要十分条件は, $p\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}$ なる continuous map $\tilde{\alpha}: X \rightarrow \mathcal{U}$ が存在することであるたゞし, $p: \mathcal{U} \rightarrow \text{Inn}(B)$ は canonical hom. である。

定理3の証明. $\alpha|_{\overline{S}}$ が inner ならば, 補題3によつて, $\widehat{\alpha|_{\overline{S}}}: \overline{S} \rightarrow \mathcal{U}$ が存在して, $p\widehat{\alpha|_{\overline{S}}} = \widetilde{\alpha|_{\overline{S}}}$. $\widetilde{\alpha|_{\overline{S}}} = \widetilde{\alpha}|_{\overline{S}}$ であるので, $\widetilde{\alpha}|_{\overline{S}}$ は continuous である。このようにして, 条件は必要である。逆に, $\widetilde{\alpha}$ が continuous としよう。補題2によつて \mathcal{U}/S^1 と $\text{Aut}(B)$ は identify とする。このとき, \mathcal{U} は $\text{Aut}(B)$ 上の fibre bundle であるから local cross section をもつ。すなわち, $\text{Aut}(B)$ の open covering $\{\mathcal{O}_x\}$ と連続関数 $s_x: \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{U}$ がある, て $p s_x = \text{id.}: \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x$.

$\{\widetilde{\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_x)\}$ は X の open covering であるから X の finite open covering $\{S_1, \dots, S_N\}$ で $S_i \subset \widetilde{\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_x)$ なるものがある。 $\tilde{\alpha}_i = s_{x_i} \widetilde{\alpha}|_{\overline{S_i}}$ とおけば, $\widetilde{\alpha}|_{\overline{S_i}} = p\tilde{\alpha}_i$ である。したがつて, 補題3によつて, $\alpha|_{\overline{S_i}}$ は inner である。ゆえに, α は locally inner である。□

定理1の証明. 定理3によつて,

$$\text{loc-Inn}(\mathcal{U}) \ni \alpha \mapsto \widetilde{\alpha} \in C(X; \text{Aut}(B))$$

は homomorphism である。これは連続である。

$\varphi \in C(X; \text{Aut}(\mathcal{B}))$ に対して、 $\hat{\varphi}(f)(t) = (\varphi(t))(f(t))$ ($f \in C(X; \mathcal{B})$, $t \in X$) とおくと、 $\hat{\varphi} \in \text{Aut}(\mathcal{C}\ell)$ である。また、 $\tilde{\alpha} = \alpha$ であるから定理 3 によると、 $\hat{\varphi} \in \text{loc-Inn}(\mathcal{C}\ell)$ である。また、 $\tilde{\alpha} = \alpha$ であるので、 $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ は onto isomorphism である。 $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ は連続である。□

注 1. X が separable T^* , \mathcal{B} が von Neumann algebra のときには、 $\text{CF}(\mathcal{C}\ell) = \text{loc-Inn}(\mathcal{C}\ell)$ である。[3, Theorem 3.1]

注 2. 高橋氏[4]は、 $C(X; \mathcal{B})$ より一般な locally compact space X 上の C^* -algebra の continuous field $\mathcal{B} = ((\mathcal{B}(t))_{t \in X}, \otimes)$ の場合へ、自然な形で $\alpha|_S$, $\tilde{\alpha}$, locally inner の定義などを拡張している。また、定理 1 と定理 3 を X が locally compact space の場合に証明している。ただし、 $C(X; \text{Aut}(\mathcal{B}))$ のかわりに $C_0(X; \text{Aut}(\mathcal{B}))$ と置く。

注 3. 定理 1 は、 \mathcal{B} の weak closure が factor である場合には同じ証明により成り立つことがわかる。また代数的な同型だけならば、 $\pi(\mathcal{B}) = C_1$ なる任意の C^* -algebra に対して成り立つ。

§ 3.

この節では定理 2 を証明する。まず algebraic topology からいくつかの事を引用する。

定理 (Kuiper) [3, Theorem G]. $\mathcal{L}(H)$ が無限次元の Hilbert space ならば、 $\mathcal{L}(H)$ の unitary group U は uniform topology に關して contractible である。

弧状連結位相空間 $K(\pi, n)$ の homotopy group がある abelian group π に対して、

$$\pi_i(K(\pi, n)) = \pi, i=n$$

$$= 0, i \neq n$$

なるとき (このとき、 $K(\pi, n)$ を Eilenberg-MacLane space と言う), 任意の compact space X に対して、

$$[X, K(\pi, n)] = \check{H}^n(X; \pi),$$

ここで、 $[X, K(\pi, n)]$ は map $f: X \rightarrow K(\pi, n)$ の homotopy class の set, $\check{H}^n(X; \pi)$ は Čech cohomology である。

特に、circle group S^1 は $K(\mathbb{Z}, 1)$ -space である。

~~fiber~~ bundle (E, B, F, p) の homotopy sequence

$$\rightarrow \pi_i(F) \xrightarrow{\iota_n} \pi_i(E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(B) \xrightarrow{\cong} \pi_{i-1}(F) \rightarrow \cdots \xrightarrow{p_*} \pi_0(B)$$

は exact である。

したがって、 $\mathcal{L}(H)$ の unitary group U は contractible であるから、 $\pi_i(U/S^1) = \pi_{i-1}(S^1) (i > 0)$ 。よって、 U/S^1 は $K(\mathbb{Z}, 2)$ -space である。ゆえに、

$$[X; U/S^1] = \check{H}^2(X; \mathbb{Z}).$$

Covering homotopy theorem:

(E, B, F, p) を fibe bundle, X を compact space とする。homotopy $f_t : X \rightarrow B$ と map $\tilde{f}_t : X \rightarrow E$ で $p\tilde{f}_t = f_t$ なるものが与えられているとする。このとき, homotopy $\tilde{f}_t : X \rightarrow E$ で $p\tilde{f}_t = f_t$ なるものがある。

定理2の証明. 定理1より, $\text{loc-Inn}(\mathcal{O}) = C(X; U/S^1)$.

補題3より, $\text{Inn}(\mathcal{O}) = p_* C(X; U) = \{pf \mid f \in C(X; U)\}$ である。

$C_0(X; U/S^1)$ を null-homotopic map $f : X \rightarrow U/S^1$ の全体とする。このとき, Covering homotopy theoremによつて,

$C_0(X; U/S^1) \subset p_* C(X; U)$ である。また, U は contractible であるから, $p_* C(X; U) \subset C_0(X; U/S^1)$ である。ゆえに,

$$\begin{aligned}\text{loc-Inn}(\mathcal{O}) / \text{Inn}(\mathcal{O}) &= C(X; U/S^1) / C_0(X; U/S^1) = [X; U/S^1] \\ &= \check{H}^2(X; \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

E. C. Lance[2]は別の方法で定理2を証明している。また, X が separable の場合に $\pi(\mathcal{O}) = \text{loc-Inn}(\mathcal{O})$ であることを示している。したがつて, $\text{Inn}(\mathcal{O}) = C_0(X; U/S^1)$ が $C(X; U/S^1)$ の connected component であること, identity component $\text{Auto}(\mathcal{O})$ が $\pi(\mathcal{O})$ に含まれることから次の定理を得る。

定理4. X が separable component space, $B = L(F)$, F は無限次元, $\mathcal{O} = C(X; B)$ とする。このとき,

$$\text{Auto}(\mathcal{O}) = \text{Inn}(\mathcal{O}).$$

それゆえ, \mathcal{O} の derivation はすべて inner である。

\mathcal{H} の次元が有限である場合と無限である場合を比較すると次のようになる。 H_n を n 次元 Hilbert space, S^m を m -sphere とする。 $\mathcal{A}_{mn} = C(S^m) \otimes L(H_n)$ とおく。 $1 < n < \infty$ のときは,
 $\text{loc-Inn}(\mathcal{A}_{2n}) / \text{Inn}(\mathcal{A}_{2n}) = 0$, $\text{loc-Inn}(\mathcal{A}_{2\infty}) / \text{Inn}(\mathcal{A}_{2\infty}) = \check{H}^2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ である。 $m=1, 3$ の場合にも $1 < n < \infty$ のときは定理 2 は成り立たない。このように, $L(\mathcal{H})$ の unitary group が contractible であることは本質的な条件である。

unitary group が contractible であることは, type I $_{\infty}$ factor 以外にはある種の type II $_{\infty}$ factor に対して知られている。[5]。また, finite type の factor の unitary group は contractible ではない[6]。

文 献

- [1] R. Kadison and J. R. Ringrose, Derivations and automorphisms of operator algebras, Comm. Math. Phys. 4 (1967), 32-63.
- [2] E. C. Lance, Automorphisms of certain operator algebras, Amer. J. Math. 91 (1967), 160-174.
- [3] M. B. Smith, On automorphism groups of C^* -algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 623-648.
- [4] S. Takesaki, A note on automorphisms of C^* -algebras.
- [5] M. Breuer, A generalization of Kipper's theorem to factor of type II_∞ , J. Math. Mech. 16 (1967), 917-925.
- [6] H. Araki, M. B. Smith and L. Smith, On the homotopical significance of the type of von Neumann algebra factors, Comm. Math. Phys. 22 (1971) 71-88.