

## 作用素環の微分と自己同型写像

東工大 木島洋一 村上潔

序. Kadison - Ringrose "Derivations and Automorphisms of Operator Algebras" Commun. math. Phys. 4, 32-63 (1967) の内容を紹介します。論文は I ~ IV の部分に分れており、I ~ III は主に一般論、IV は特殊例についての考察になっています。  
I ~ III は木島、IV は村上が受けました。

## § I ~ III (一般論)

$C^*$ -algebra の \*-自己同型写像全体は自然な定義の仕方で位相群をなしている。この位相群の特殊な部分群として 2 個、それに加えて  $C^*$ -algebra の忠実な \*-表現に関連して定義される部分群 4 個が考察の対象になっている。

これらの部分群たちに対して、お互いの包含関係はどうなっているか？ それらは位相的に開または閉になっているか？ それらは他の正規部分群になっているか？ などの問題に解答を与えている。

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$  を Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の有界線型作用素全体のつくる  $C^*$ -algebra とし、 $\mathcal{H}$  上の恒等作用素を  $1_{\mathcal{H}}$  で表わす。 $\mathcal{O}$  は  $1_{\mathcal{H}}$  を含む  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  の  $C^*$ -subalgebra で  $\overline{\mathcal{O}}$  は  $\mathcal{O}$  の weak-operator closure とする。 $\mathcal{O}$  上の \*-自己同型写像  $\varphi$  に対して、

(1)  $\varphi$  が  $\overline{\mathcal{O}}$  上の \*-自己同型写像に拡張できるとき、

$\varphi$  は extendable であるという。

(2)  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  のある unitary operator  $U$  が存在して  $\mathcal{O}$  上で  $\varphi(T) = U T U^*$  と表わされるとき、 $\varphi$  は spatial であるという。

(3)  $\overline{\mathcal{O}}$  のある unitary operator  $U$  が存在して  $\mathcal{O}$  上で  $\varphi(T) = U T U^*$  と表わされるとき、 $\varphi$  は weakly-inner であるという。

$\mathcal{O}$  の \*-自己同型写像全体を  $\varPhi(\mathcal{O})$  で表わす。 $\varPhi(\mathcal{O})$  は通常の作用素の積に関して群になっている。この群の単位元は  $\mathcal{O}$  上の恒等自己同型写像でこれを  $I$  で表わすことにする。

さらに、 $\varPhi(\mathcal{O})$  は metric  $\|\varphi_1 - \varphi_2\|$  によって位相群になる。

そこで以下  $\varPhi(\mathcal{O})$  を位相群と考える。任意の  $\varphi, \varphi_2 \in \varPhi(\mathcal{O})$  に対して  $\|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq 2$ 、特に任意の  $\varphi \in \varPhi(\mathcal{O})$  に対して、

$\|\varphi - I\| \leq 2$  となっていることは、つきの主要結果との関連において注目に値する。(定理の番号は原論文の番号と一致していません)

定理1.  $\{\varphi_t\} (-\infty < t < +\infty)$  を  $\varphi(\mathcal{O})$  の連続1絆数部分群とすれば、各  $\varphi_t$  は weakly-inner である。

定理2.  $\|\varphi - I\| < 2$  ならば、ある連続1絆数部分群  $\{\varphi_t\} (-\infty < t < +\infty)$  で  $\varphi$  を含むものが存在する。

$A$  を単位元  $1$  をもつ  $C^*$ -algebra とする。 $A$  の\*-自己同型写像全体を  $\alpha(A)$  で表わす。まえと同様にして、 $\alpha(A)$  は位相群になる。 $\alpha(A)$  の単位元は  $A$  上の恒等自己同型写像であり、これを  $\text{id}$  で表わすことにする。いま  $A$  から  $L(\varphi)$  への忠実な\*-表現  $\varphi$  が与えられたとする。(つねに  $\varphi(1) = 1_{\varphi}$  と仮定しておく) このとき前との関連で  $\varphi(A) = \mathcal{O}$  とおくことすれば、 $A$  上の任意の\*-自己同型写像  $\alpha$  に対して、 $\varphi \alpha \varphi^{-1}$  は  $\mathcal{O}$  上の\*-自己同型写像になっている。これらのこととをもとにして  $\alpha(A)$  のいくつかの部分群を定義する。

$\text{lo}(A)$ :  $A$  の内部\*-自己同型写像全体。

$\text{Tr}(A)$ :  $\alpha(A)$  の単位元  $1$  の連結成分。これは位相群の定理から  $\alpha(A)$  の閉正規部分群である。

$\mathfrak{E}_\varphi(A)$ :  $\varphi \alpha \varphi^{-1}$  が extendable である  $\alpha$  の全体。

$\mathcal{O}_\varphi(A)$ :  $\varphi \alpha \varphi^{-1}$  が spatial である  $\alpha$  の全体。

$\iota_\varphi(A)$ :  $\varphi \alpha \varphi^{-1}$  が weakly-inner である  $\alpha$  の全体。

$\pi(A)$ : 任意の忠実な  $*$ -表現  $\varphi$  に対して、 $\varphi \alpha \varphi^{-1}$  が weakly-inner である  $\alpha$  の全体。このような  $\alpha$  は  $\pi$ -inner または permanently weakly inner であるとよばれる。

定理3.  $\{\alpha_t\} (-\infty < t < +\infty)$  を  $\alpha(A)$  の連続1径数部分群とすれば、各  $\alpha_t$  は  $\pi$ -inner である。

定理4.  $\|\alpha - \zeta\| < 2$  ならば、ある連続1径数部分群  $\{\alpha_t\} (-\infty < t < +\infty)$  で  $\alpha$  を含むものが存在する。

定理3、定理4 はそれぞれ定理1、定理2 の言いかえてある。これらの定理から次の主要定理が得られる。

定理5.  $\{\alpha : \|\alpha - \zeta\| < 2\} \subseteq \tau(A) \subseteq \pi(A).$

以上の諸定理から最初にあげた問題の解答は、それぞれ以下の定理6、定理7、定理8 の形で述べられる。

定理 6.  $\mathcal{L}_0(A), \gamma(A) \subseteq \pi(A) \subseteq \mathcal{L}_\varphi(A) \subseteq \sigma_\varphi(A) \subseteq \varepsilon_\varphi(A) \subseteq \alpha(A)$ 。

$\mathcal{L}_0(A)$  と  $\gamma(A)$  の包含関係はさまざまの場合がある。

定理 7.  $\gamma(A), \pi(A), \mathcal{L}_\varphi(A), \sigma_\varphi(A), \varepsilon_\varphi(A)$  は  $\alpha(A)$  の開かつ閉な部分群である。  $\mathcal{L}_0(A)$  についてはさまざまな場合がある。

定理 8.  $\mathcal{L}_0(A) \triangleleft \alpha(A), \gamma(A) \triangleleft \alpha(A), \pi(A) \triangleleft \alpha(A),$   
 $\mathcal{L}_\varphi(A) \triangleleft \varepsilon_\varphi(A)$ 。一方、 $\mathcal{L}_\varphi(A) \triangleleft \alpha(A), \sigma_\varphi(A) \triangleleft \varepsilon_\varphi(A),$   
 $\varepsilon_\varphi(A) \triangleleft \alpha(A)$  でない例がある。

補.  $\mathcal{L}_0(A)$  の位相的性質および  $\varphi$  として universal representation を考えた場合の議論が Kadison-Lance-Ringrose "Derivations and Automorphisms of Operator Algebras. II" Journal of Functional Analysis 1, 204-221 (1967) でなされています。また  $\varphi$  として reduced atomic representation を考えた場合の議論は Lance "Automorphisms of Postliminal  $C^*$ -algebras" Pacific Journal of Math. Vol. 23, No. 3, 1967 でなされています。

## § 4 特殊例

ここでは  $\alpha(\Omega)$  の部分群の間の包含関係について、いくつかの例を示す。

例 1. ある  $C^*$ -algebra  $\Omega$  に対して、二つの忠実 \* 表現  $\varphi$  と  $\theta$  が存在し、ある  $\lambda \in \alpha(\Omega)$  に対して  $\lambda \in \varphi(\Omega), \theta \notin \varphi(\Omega)$  となる。この時  $\varphi(\Omega) \subset \pi(\Omega) \subsetneq \varphi(\Omega)$ 。

$\Omega$ : the fermion algebra.

$\{M_n\}$ : a family of increasing self-adjoint subalgebras of  $\Omega$  with same unit and  $M_n \cong \{2^n \times 2^n\text{-matrix}\}$ .  
and  $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n = \text{a dense subalgebra of } \Omega$ . ( $M_0 = I$ )

$M_n$  の matrix units を次のように選ぶ

$E_{j,j}^n$  ( $j=1, \dots, 2^n$ ): orthogonal projections,  $E_{j,k}^n = E_{k,j}^n$

$E_{j,j}^n = E_{2^{n-1}, 2^{n-1}}^n + E_{2^j, 2^j}^n$ ;  $E_{2^{n-1}, 1}^n = E_{j,1}^n E_{1,1}^n$ ;  $E_{2^j, 2}^n = E_{j,1}^n E_{2,2}^n$

この時  $\lambda \in \alpha(\Omega)$   $\lambda(E_{j,k}^n) = E_{2^{n-j+1}, 2^{n-k+1}}^n$

又  $T_n \in \sum_{j+k=2^n+1} E_{j,k}^n \Rightarrow \lambda(A) = T_n A T_n^* = T_{n+1} A T_{n+1}^*, A \in M_n C M_{n+1}$

### I) $\varphi$ の構成

$\varphi = L^2([0,1], m)$  ( $m$ : the Lebegue measure)

$\varphi(E_{j,k}^n)$ :  $(\chi_{S_k^n} f)(t) \rightarrow \chi_{S_j^n}(t) f(t - \frac{j-1}{2} + \frac{k-1}{2})$   $f \in \varphi$ ,  $S_k^n = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$

$\varphi(E_{j,k}^n)$ : partial isometry  $\chi_{S_k^n} \varphi \rightarrow \chi_{S_j^n} \varphi$

$\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{G})$  に拡張でき、忠実な表現となる。

$M_f \in \varphi(\mathcal{O})$  for  $f \in C([0,1])$ ,  $(M_f)(g) = f(g) g(g)$   $\Rightarrow \varphi(\mathcal{O})' = \mathbb{C}I$

故に  $\varphi$  既約 i.e.  $\overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega = \mathcal{L}(\mathcal{G})$

II)  $\lambda \in L_\varphi(\mathcal{O})$

$\bigvee \{X_{S_j^n}; n=1, 2, \dots, j=1, \dots, 2^n\}$ : dense in  $\mathcal{G}$

$\varphi(T_n)(X_{S_j^n}) = \varphi(T_m)(X_{S_j^n})$  for  $m \geq n$ ,

$\|\varphi(T_n)\| = 1$ ,  $\varphi(T_n)^2 = I$  for  $n$ .

$\Rightarrow \exists T \in \mathcal{L}(\mathcal{G})^{\text{inv}} \quad \varphi(T_n) \rightarrow T, \quad T \varphi(E_{j,k}^n) T = \varphi(T_n) \varphi(E_{j,k}^n) \varphi(T_n)$

故に  $\varphi \lambda \varphi^{-1}(A) = T A T$ .  $A \in \varphi(\mathcal{O})$ .

$\varphi$  既約  $\Rightarrow T \in \overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega \quad \therefore \lambda \in L_\varphi(\mathcal{O})$ .

III)  $\theta$  の構成

$\mathcal{G}_0 = L^2([0,1], M)$   $M(B) \equiv$  the number of dyadic points in  $B$

$\theta(E_{j,k}^n); (X_{T_k^n} f)(t) \rightarrow X_{T_j^n}(t) f(t - \frac{j-1}{2} + \frac{k-1}{2})$   $f \in \mathcal{G}_0$ ,  $T_k^n = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$

$\theta : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{G}_0)$  に拡張でき、忠実な表現になる。

$\{X_{\frac{j}{2^n}}(t); n=1, 2, \dots, j=1, \dots, 2^{n-1}\}$ :  $\mathcal{G}_0$  の正規直交規底

$P_{\frac{j}{2^n}} = \bigwedge_{m \geq n} \varphi(E_{j,2^{m-n+1}, j, 2^{m-n+1}}^m)$   $P_{\frac{j}{2^n}}$ : projection on  $X_{\frac{j}{2^n}} \mathcal{G}_0$ .

$E_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}} : \text{partial isometry} \quad X_{\frac{k}{2^n}} \mathcal{G}_0 \rightarrow X_{\frac{j}{2^n}} \mathcal{G}_0$

$E_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}} E_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}*} = P_{\frac{j}{2^n}}$   $E_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}*} E_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}} = P_{\frac{k}{2^n}}$ .

$\varphi(E_{P,g}^\ell) \rightarrow E_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}}$  (weak) as  $\ell \rightarrow \infty$   $\begin{cases} p = j2^{e-n+1} & \ell \geq n \\ q = k2^{e-n+1} & \ell \geq m \end{cases}$

以上より  $\overline{\theta(\mathcal{O})}^\omega = \mathcal{L}(\mathcal{G}_0)$  i.e.  $\theta$  既約

IV)  $\alpha \notin E_\theta(\Omega)$

$$\Rightarrow \alpha(E_{11}^n) = E_{2^n 2^n}^n \quad \Lambda \theta(E_{11}^n) = P_0 \quad \Lambda \theta(E_{2^n 2^n}^n) = 0$$

$\theta \alpha \theta^*$  は  $\overline{\theta(\Omega)}^\omega = \mathcal{L}(\mathbb{H}_0)$  に拡張できない。すなはち  $\alpha \notin E_\theta(\Omega)$ .

例2  $L_0(\Omega) \subsetneq \pi(\Omega)$  の例を作る。

$\mathcal{H}$ : separable Hilbert space.

$$\Omega = V\{I, CC(\mathcal{H})\} = \{aI + C : a \in \mathbb{C}, C \in CC(\mathcal{H})\}$$

$\Omega$  の既約表現は  $\Omega$  を定義したものか、又は 1 次元表現だけである。他の表現はこれら 2 つの copy の直和である。

$\varphi$ :  $\Omega$  の忠実未表現

$\Rightarrow$   ${}^3Q$ : central projection of  $\overline{\varphi(\Omega)}^\omega$

$$\overline{\varphi(\Omega)}^\omega(I - Q) = \{\lambda(I - Q), \overline{\varphi(\Omega)}^\omega Q\} \text{ factor of Type I.}$$

$$\Rightarrow \alpha \in \alpha(\varphi(\Omega)) \Leftrightarrow \alpha \in \alpha(\overline{\varphi(\Omega)}^\omega) \quad \alpha|_{\varphi(\Omega)} = \alpha,$$

$$\Rightarrow \exists : \overline{\varphi(\Omega)}^\omega Q \rightarrow \overline{\varphi(\Omega)}^\omega Q \text{ onto, } \overline{\varphi(\Omega)}^\omega(I - Q) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \exists \in L_0(\overline{\varphi(\Omega)}^\omega) \quad i.e. \alpha \in L_\varphi(\Omega)$$

$$\varphi: 任意 \Rightarrow \alpha \in \pi(\Omega) \quad i.e. \alpha(\Omega) = \pi(\Omega).$$

$$\therefore \forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^\omega, T \notin \Omega \Leftrightarrow$$

$$\alpha(A) \equiv TAAT^* \quad A \in \Omega \Rightarrow \alpha \in \alpha(\Omega) \quad \alpha \notin L_0(\Omega)$$

$$[\text{注. この時 } \varphi(\Omega) = \pi(\Omega) = \alpha(\Omega) = \{T, T^* : T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^\omega\}]$$

$$\Rightarrow T = \exp iH, \quad T_t = \exp itH, \quad \alpha_t(\cdot) \equiv U_t \cdot U_t^*$$

$$t \rightarrow \alpha_t: \text{norm cont. one-parameter group in } \alpha(\Omega)$$

$\therefore \alpha \in \delta(\Omega), \quad \alpha = \alpha_1 \in \delta(\Omega). \quad ]$

例3 ある  $C^*$ -algebra  $\mathcal{E}$ . 忠実\*表現しが存在し.

$\mathcal{L}_0(\Omega) \subsetneq \pi(\Omega) \subsetneq \mathcal{L}_2(\Omega)$  なる例を作ろ。

$\mathcal{H}$ : separable Hilbert space

$M$ : factor of Type II acting on  $\mathcal{H}$  with coupling 1.

$\Omega = \{A+C; A \in M, C \in CC(\mathcal{H})\} : C^*$ -algebra.

$M$  の仮定より  $\alpha \in \delta(M), \exists T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{(w)} \quad \alpha(\cdot) = T \cdot T^*$

$\alpha_0(A+C) \equiv T(A+C)T^* \Rightarrow \alpha_0 \in \delta(\Omega).$

$\mathcal{L}$ :  $\Omega$  を定義したと上との表現  $\Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}_2(\Omega).$

$\Omega/CC(\mathcal{H}) = M \Rightarrow \psi: A+C \rightarrow A \quad \Omega$  のと上との\*表現

$\varphi = \mathcal{L} \oplus \psi: \Omega$  のと上との忠実\*表現,  $\overline{\varphi(\Omega)}^w = \mathcal{L}(\mathcal{H}) \oplus M$

$B \equiv \varphi \alpha_0 \varphi^{-1} \quad \beta(\{A+C, A\}) = \{\alpha_0(A) + \alpha_0(C), \alpha_0(A)\} \quad A \in M, C \in CC(\mathcal{H})$

故に  $\alpha \notin \mathcal{L}_0(M) \Rightarrow \beta \notin \mathcal{L}_0(\overline{\varphi(\Omega)}^w) \quad \text{i.e. } \alpha_0 \notin \mathcal{L}_0(\Omega).$

$\therefore \pi(\Omega) \subsetneq \mathcal{L}_2(\Omega).$

次.  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{(w)} \cap M' \quad \|T - I\| < 1, \quad T \neq \lambda I, |\lambda| = 1$ .

$\alpha(\cdot) \equiv T \cdot T^*, \quad \|\alpha - I\| < 2.$

定理5より  $\alpha \in \delta(\Omega) \subset \pi(\Omega)$

一方  $\alpha \notin \mathcal{L}_0(\Omega) \quad \therefore \mathcal{L}_0(\Omega) \subsetneq \pi(\Omega).$

[注 この時  $\alpha \in \delta(\Omega), \alpha|_M = I_M \Rightarrow \alpha \in \delta(\Omega)$

$\alpha|_M = I_M \Rightarrow \exists T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{(w)} \cap M' \quad \alpha(\cdot) = T \cdot T^*$

$$U = \exp iH, \quad U_t = \exp itH \quad \alpha_t(\cdot) = U_t \cdot U_t^*$$

例3の注と同様に  $\exists \alpha \in \mathcal{J}(\Omega)$

例4  $\alpha(\Omega)$  の部分群  $\mathcal{J}(\Omega), \mathcal{L}(\Omega), \pi(\Omega)$  について  $\alpha$  の包含関係を Homotopy Theory を使って考察する。

$$\mathcal{A} = C(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C}, \text{cont.}\} \quad X: \text{compact } T_2\text{-space.}$$

$$M_n = \mathcal{L}(F_n) = \{n \times n\text{-matrix}\} \quad F_n: n\text{-次元複素 Hilbert 空間}$$

$$\Omega = \mathcal{A} \otimes M_n \cong C(X, M_n) = \{f: X \rightarrow M_n, \text{cont.}\} \quad \mathcal{E} = \Omega \cap \Omega'$$

$$\alpha_c(\Omega) = \{\alpha \in \alpha(\Omega); \alpha(A) = A, \text{ for } \forall A \in \mathcal{E}\}.$$

I)  $\alpha_c(\Omega) = \pi(\Omega)$  を示す

$\alpha \in \pi(\Omega)$ ,  $\varphi: \Omega$  の一つの忠実表現

$${}^2 U \in \overline{\mathcal{J}(\Omega)}^w, U: \text{unitary} \quad \varphi \alpha \varphi^{-1}(\cdot) = U \cdot U^*$$

$$A \in \mathcal{E} \subset \varphi^{-1}(\overline{\mathcal{J}(\Omega)}^w \cap \varphi(\Omega)) \quad \alpha(A) = \varphi^{-1}(\varphi \alpha \varphi^{-1})(\varphi(A)) = A.$$

$$\therefore \alpha \in \alpha_c(\Omega). \quad \pi(\Omega) \subset \alpha_c(\Omega).$$

逆に  $\alpha \in \alpha_c(\Omega)$  とする。

$\Omega$  の忠実表現は  $\alpha$  が  $\alpha$  の上に忠実表現されている Hilbert space  $F_n$  の  $n$ -直和  $\oplus_{n=1}^{\infty} F_n$  上に作用している  $\mathcal{A} \otimes M_n$  と unitary 同値である事を注意しておく。

$\{E_{j,k}; j, k = 1, 2, \dots, n\}$ : matrix units of  $M_n$ .

$$\alpha(I \otimes E_{j,k}) \equiv B_{j,k}$$

$$\Rightarrow \alpha(\sum_{j,k} A_{j,k} \otimes E_{j,k}) = \sum_{j,k} (A_{j,k} \otimes I) B_{j,k} \quad (\because \alpha(A_{j,k} \otimes I) = A_{j,k} \otimes I)$$

$\xrightarrow{\text{def}} \mathcal{L} \subset \mathcal{L}(f^* \mathcal{A})$ ; strong operator cont.

$\xrightarrow{\exists} \mathcal{L} \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{A}}^{\omega})$  ( $\overline{\mathcal{A}}^{\omega} = \mathcal{A}'^{\omega} \otimes M_n$ )  $\mathcal{L}|_{\mathcal{A}'} = \mathcal{L}$ .

$\xrightarrow{\Rightarrow} \mathcal{L}(A \otimes I) = A \otimes \mathcal{L}$ ,  $A \in \mathcal{A}'^{\omega}$ ,  $\overline{\mathcal{A}}^{\omega} = \mathcal{A}'^{\omega} \otimes I$

$\xrightarrow{\Rightarrow} \mathcal{L} \in \mathcal{L}_0(\overline{\mathcal{A}}^{\omega})$  ( $\because \overline{\mathcal{A}}^{\omega}$ : Type I v.N.-alg.)

$\mathcal{L} \in \pi(\mathcal{A})$  (上の注意より)  $\therefore \mathcal{L}_c(\alpha) \subset \pi(\mathcal{A})$

II)  $\mathcal{J}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}_0(\mathcal{A}) \subset \pi(\mathcal{A})$  を示す。

i)  $\pi(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_c(\alpha) \cong C(X, \mathcal{L}(M_n)) = \{f: X \rightarrow \mathcal{L}(M_n) \text{ cont.}\}$

$\xrightarrow{\text{def}} \mathcal{L} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{A}), \rho \in X, \varphi_{\rho} \in P(A)B \quad (A \in C(X), \rho(A) = A(\rho))$

$\varphi_{\rho}$ : homomorphism of  $\mathcal{A} \otimes M_n$  onto  $M_n$

$B \in M_n, \mathcal{L}(\rho)(B) \equiv \varphi_{\rho}(\mathcal{L}(I \otimes B))$

$\xrightarrow{\Rightarrow} \mathcal{L}(\rho) \in \mathcal{L}(M_n)$  ( $\because M_n$ : 有限次元)

$\rho \mapsto \mathcal{L}(\rho): X \rightarrow \mathcal{L}(M_n)$ : cont. ( $f_{\mathcal{L}}$   $\times$  著)

$f_{\mathcal{L}} \in C(X, \mathcal{L}(M_n))$

逆に  $f \in C(X, \mathcal{L}(M_n))$   $f(\rho) \equiv \mathcal{L}_f(\rho)$

$\xrightarrow{\Rightarrow} B \in M_n, \mathcal{L}_f(\rho)B = \sum_{jk} \widehat{A}_{jk}(\rho) E_{jk}$

$\widehat{A}_{jk}: \rho \mapsto \widehat{A}_{jk}(\rho): X \rightarrow \mathbb{C}$  cont. i.e.  $\widehat{A}_{jk} \in C(X) = \mathcal{A}$ .

$\xrightarrow{\Rightarrow} \mathcal{L}_f(A \otimes B) \equiv \sum_{jk} A \widehat{A}_{jk} \otimes E_{jk}$

$\xrightarrow{\Rightarrow} \mathcal{L}_f \in \mathcal{L}(\mathcal{A}), \mathcal{L}_f(A \otimes I) = A \otimes \mathcal{L}, A \in \mathcal{A}$ .

$\mathcal{L}_f \in \mathcal{L}_c(\mathcal{A})$

ii)  $\mathcal{U}(n) = M_n^{(n)}$   $T_1 = \{\lambda I_n, |\lambda| = 1\}$ ; the center of  $\mathcal{U}(n)$

$P: \mathcal{U}(n) \rightarrow \mathcal{U}(n)/T_1$ : canonical map

homotopy theory たり

$T(n)/T_1$ : base space,  $T(n)$ : bundle  $P$ : projection

$T_1$ : fiber and group

尤考えたり

$$\mathcal{L}(M_n) = \mathcal{L}_0(M_n) \cong T(n)/T_1$$

$$\alpha \in \mathcal{L}_0(\Omega) \quad \exists U_2 \in \Omega^{(n)} \quad \alpha(\cdot) = U_2 \cdot U_2^*$$

$$f_2(P) \equiv \varphi_P(U_2) \in T(n)$$

$$\Rightarrow f_2 \in C(X, T(n)) = \{f: X \rightarrow T(n); \text{cont.}\}, \quad f_2 = Pf_2$$

$$\text{逆} \quad \text{f} \in C(X, T(n)) = C(X, M_n)^{(n)} \cong \Omega^{(n)}$$

$$\Rightarrow f = Pf \in C(X, T(n)/T_1) = C(X, \mathcal{L}(M_n)) \cong \mathcal{L}_0(\Omega)$$

$$\alpha_f(\cdot) = f \cdot f^*, \quad \therefore \alpha_f \in \mathcal{L}_0(\Omega)$$

$$\text{以上より } \mathcal{L}_0(\Omega) \cong \{f \in C(X, T(n)/T_1), \exists f \in C(X, T(n)), f = Pf\}$$

iii)  $\mathcal{J}(\Omega) \subset \mathcal{L}_0(\Omega)$  を示す

$$j \in \mathcal{J}(\Omega)$$

$\Rightarrow \exists j_i(t)$ : norm-cont. one-parameter group on  $\mathcal{L}(\Omega)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )

$$j = j_1(1) \cdots j_m(1)$$

$$P(P, t) \equiv (j_1(t))(P) \cdots (j_m(t))(P): X \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(M_n) \cong T(n)/T_1$$

$P$  is a homotopy of  $j$  and constant mapping  $X \rightarrow T_1$

$$\Rightarrow \exists \bar{P}: X \times [0, 1] \rightarrow T(n) \text{ cont.} \quad P \bar{P} = P$$

$$j = P(P, 1) = P \bar{P}(P, 1) \quad \therefore j \in \mathcal{L}_0(\Omega).$$

III)  $\pi(\Omega)/\gamma(\Omega) \cong$  the group of homotopy class of  $C(X, U(n)/T_1)$

$$\begin{aligned} & \alpha, \beta \in \pi(\Omega), [\alpha] = [\beta] \text{ in } \pi(\Omega)/\gamma(\Omega) \\ \Rightarrow & \gamma \alpha \sim \gamma \beta, \quad \alpha \sim \beta \end{aligned}$$

$P(p, t): X \times [0, 1] \rightarrow U(n)/T_1$ ; homotopy of  $\gamma$  and  $p \rightarrow T$ .

$\beta(p) P(p, t)$ : a homotopy of  $\beta$  and  $\alpha$ .

逆に  $\alpha, \beta \in \pi(\Omega) \cong C(X, U(n)/T_1)$ .  $\alpha$  and  $\beta$  are homotopic

$$\begin{aligned} & P(p, t): a \text{ homotopy of } \beta \text{ and } \alpha \\ \Rightarrow & \beta^{-1}(p) P(p, t): a \text{ homotopy of } \beta^{-1}\alpha \text{ and } p \rightarrow T_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta^{-1}\alpha \in \gamma(\Omega) \quad ; \quad [\alpha] = [\beta] \text{ in } \pi(\Omega)/\gamma(\Omega). \end{aligned}$$

以上の事から  $\gamma(\Omega)$ ,  $L_0(\Omega)$ ,  $\pi(\Omega)$  の細い包含関係を  $X$  の性質

12通り与える事ができる。

I)  $\Rightarrow X$ : contractive (例えば  $X = \text{the unit ball in } \mathbb{R}^n$ )

$\Rightarrow X$  の連続写像は必ず恒等写像と homotopic.

$$\begin{aligned} & \pi(\Omega)/\gamma(\Omega) \cong \{0\}, \quad ; \quad \gamma(\Omega) = L_0(\Omega) = \pi(\Omega). \end{aligned}$$

II)  $X = U(n)/T_1 \Rightarrow \gamma(\Omega) \subsetneq L_0(\Omega) \subsetneq \pi(\Omega)$ .

$l: U(n)/T_1 \rightarrow U(n)/T_1$ : 恒等写像  $\in C(X, U(n)/T_1) \cong \pi(\Omega)$

$\Rightarrow l \in \gamma(\Omega)$ ,  $f \in C(X, U(n))$ ,  $l \neq pf$

$l \notin L_0(\Omega)$ ,  $\therefore L_0(\Omega) \subsetneq \pi(\Omega)$

次  $U(n)/T_1 \cong SU(n)/\mathbb{Z}_n$ ,  $SU(n) = \{A \in U(n), \det A = 1\}$

$$U(n) = T_1 \times SU(n)$$

9)

$\theta : SU(n) \rightarrow SU(n)/T_1$  canonical map

$i : SU(n) \rightarrow U(n) \cong T_1 \times SU(n) \quad i(U) = (I, U)$

$s : SU(n) \rightarrow SU(n) \quad s(U) = U^n$

$r : SU(n)/\mathbb{Z}_n \rightarrow SU(n) \quad r(U\mathbb{Z}_n) = U^n \quad rg = s$

$t \in \{r, s\} : SU(n)/\mathbb{Z}_n \rightarrow U(n)$  cont. i.e.  $t \in C(X, U(n))$

$$\begin{array}{ccc} SU(n)/\mathbb{Z}_n & \xrightarrow{t} & U(n) \\ \theta \uparrow & \searrow & \uparrow i \\ SU(n) & \xrightarrow{s} & SU(n) \end{array}$$

$\alpha \in Pt : U(n)/T_1 \rightarrow U(n)/T_1$  cont. i.e.  $\alpha \in C(X, U(n)/T_1)$

$\alpha$ : not essential (i.e.  $\alpha$  is not homotopic to constant)

$\Rightarrow \alpha \notin J(\partial\Omega) \quad - \exists \alpha \in L_0(\partial\Omega) \cong \{\alpha \in C(X, U(n)/T_1) \mid \exists t \in C(X, U(n)) \text{ map } \alpha = pt\}$

III)  $X = T_1 \Rightarrow J(\partial\Omega) \subseteq L_0(\partial\Omega) = \pi(\partial\Omega)$

$$\pi(\partial\Omega)/J(\partial\Omega) = \pi_1(SU(n)/\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$$

$\Rightarrow (\pi_n(X); [0, 1]^n \rightarrow X \text{ cont.} \circ \text{homotopy group})$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \pi_1(\partial\Omega), [\alpha] \neq [0] \quad \therefore \alpha \notin J(\partial\Omega) \quad \therefore J(\partial\Omega) \subsetneq \pi_1(\partial\Omega)$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \pi_1(\partial\Omega) \cong C(T_1, U(n)/T_1) \quad \exists \bar{\alpha} \in C(T_1, U(n)) \quad \alpha = P\bar{\alpha}$

$\Rightarrow \alpha \in L_0(\partial\Omega) \quad \therefore L_0(\partial\Omega) = \pi_1(\partial\Omega)$

IV)  $X = 2\text{-skelton of a triangulation of } \mathbb{P}^3$

$\Rightarrow J(\partial\Omega) = L_0(\partial\Omega) \subsetneq \pi_1(\partial\Omega)$

V)  $X = S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1}, \|x\|=1\}$

$\Omega_{mn} \equiv C(S^m) \otimes M_n$

$\Rightarrow \pi_1(\Omega_{mn})/J(\Omega_{mn}) \cong \pi_m(U(n)/T_1) = \begin{cases} 0 & m: \text{even} \\ \mathbb{Z} & m: \text{odd} \neq 1 \end{cases} \quad m < 2n$

$m$ : even,  $< 2n$  の時

$$\pi(\partial_{mn})/\mathcal{J}(\partial_{mn}) = 0 \quad \therefore \mathcal{J}(\partial_{mn}) = L_0(\partial_{mn}) = \pi(\partial_{mn}).$$

$m$ : odd,  $\neq 1 < 2n$  の時

$$\pi(\partial_{mn})/\mathcal{J}(\partial_{mn}) = \mathbb{Z} \quad \therefore \mathcal{J}(\partial_{mn}) \subsetneq \pi(\partial_{mn})$$

又一般に  $L_0(\partial_{mn}) = \pi(\partial_{mn})$  for  $m, n = 1, 2, \dots$ ,

$\therefore m=1 \Rightarrow X=T_1$ , III) の case

$m=2 \Rightarrow n>2$  の時上記より明らか,  $n=1$  の時  $D(n)/T_1 = 0$

から明らか

$m > 2$  の時 homotopy sequence

$$\cdots \pi_m(T_1) \rightarrow \pi_m(D(n)) \xrightarrow{P_*} \pi_m(D(n)/T_1) \rightarrow \pi_{m-1}(T_1) \cdots$$

II exact.  $\therefore P_*$ : onto isomorphism

$$\Rightarrow \forall \alpha \in C(\partial_{mn}) \cong C(S^m, D(n)/T_1). \exists \beta \in C(S^m, D(n))$$

$$\alpha = P\beta \quad \therefore \alpha \in L_0(\partial_{mn}) \quad \therefore L_0(\partial_{mn}) = \pi(\partial_{mn}).$$