

作用素環の接合積における或る結果について

大阪教育大 高井 博司

§1. 序

作用素環の接合積に関する研究は、1950年代の後半に東北大学の研究者によるグループが、種々の議論を展開して、今日のこの方面での基礎を築いたけれども、元來は Murray と von Neumann による factor の example に起因している。そして今日では、接合積の理論は、多方面に於いて用いられるに至った。例えば Ching による II₁-factor の存在と ([5])、non-hyperfinite な III-factor が非可算無限有ることの証明や ([6])、最近では、Nakamura-Takeda による Galois の理論 ([8]) の一般化を Henle がやっている。([4])

一方 C*-algebra の接合積については Turumaru ([2]) により始めて導入されその後この理論が基礎となり continuous group による C*-接合積の議論が Glimm ([1]), Effros ([10]), Guichardet ([13], [15]), などによりなされ、Søller-Meyer ([20]) がそれらを体

系的にまとめ議論を展開した。この paper では最近得たる、この結果について述べてみることにする。

§ 2. 作用素環の接合積の構成

先ず、von Neumann algebra から話をする。M を Hilbert space 上の von Neumann algebra とする。 $\|\sum_{g \in G} g \otimes \xi_g\| \equiv \sum_g \|\xi_g\|^2 < +\infty$ なる $\sum_{g \in G} g \otimes \xi_g$ の全体を $G \otimes \mathcal{H}$ で表わすことにする。ただし G は M 上の countable (discrete) automorphism group である。今 $G \otimes \mathcal{H}$ に Hilbert space の構造を次の様にして入れる：

$\sum g \otimes \xi_g, \sum h \otimes \eta_h \in G \otimes \mathcal{H}$ に対して

$$(\sum g \otimes \xi_g) + (\sum h \otimes \eta_h) = \sum k \otimes (\xi_k + \eta_k)$$

$$\lambda (\sum g \otimes \xi_g) = \sum g \otimes (\lambda \xi_g) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

$$\langle \sum g \otimes \xi_g | \sum h \otimes \eta_h \rangle = \sum_g \langle \xi_g | \eta_g \rangle$$

そしてこの Hilbert space $G \otimes \mathcal{H}$ 上の bounded linear operator を次の様に定義する：

$g \in G, x \in M$ に対して

$$(g \otimes x) (\sum_h h \otimes \xi_h) = \sum_h h g' \otimes h(x) \xi_h$$

$$(\sum_h h \otimes \xi_h \in G \otimes \mathcal{H})$$

(M の G に対する接合積)

この時、 $\vee G \otimes M$ を $g \otimes x$ ($g \in G, x \in M$) で生成される von Neumann algebra とおると、 $g \otimes x, h \otimes y \in G \otimes M$ に対してこれらの積と * operation それから automorphism の関係は次の式で表わされ

る:

$$(g \otimes x)(h \otimes y) = gh \otimes h'(x)y$$

$$(g \otimes x)^* = g' \otimes g(x^*)$$

$$(g \otimes 1)(1 \otimes x)(g \otimes 1)^* = 1 \otimes g(x) \quad (g, h \in G, x, y \in M)$$

今 $G \otimes M$ から $1 \otimes M$ への mapping を次の様に定義する:

$$e(T) = \sum_{g \in G} P_g T P_g \quad (T \in G \otimes M)$$

ただし P_g は $G \otimes M$ から $g \otimes M$ への projection である。その時 e は $G \otimes M$ から $1 \otimes M$ への faithful normal expectation になる。以下これを canonical expectation と呼ぶことにする。さて今 f を M 上の faithful normal state とし $\tilde{f} = f \circ e$ とおくと \tilde{f} は $G \otimes M$ 上の faithful normal state となりよく知られているように $G \otimes M$ の任意の element T は uniquely に Fourier 展開されて次の様に書ける。

$$T = \sum_g g \otimes x_g \quad (\text{w.r.t } \tilde{f}\text{-norm}) \quad (x_g \in M)$$

実際は $x_g = e((g \otimes 1)^* T)$ となる。[14]

次に C^* 接合積の話をお少し述べよう。 \mathcal{A} を C^* -algebra とし G をその上の countable discrete automorphism group とする。 $\mathcal{L}(G, \mathcal{A})$ で G から \mathcal{A} への mapping F で $\sum_g \|F_g\| < +\infty$ なる条件を満足するもの全体を表わす。 $\mathcal{L}(G, \mathcal{A}) \rightarrow F, G$ に対して積と $*$ -operation 及び norm を次の様に定義する:

$$(FG)_g = \sum_h F_h h(g h^{-1} g)$$

$$(F^*)_g = g(F_g^*)$$

$$\|F\|_1 = \sum_g \|F_g\|,$$

その時 $\mathcal{L}(G; \mathcal{A})$ は *Banach $*$ algebra* となり、これは *group algebra* $\mathcal{L}(G)$ の拡張になっていると考えられる。さらに $\mathcal{L}(G; \mathcal{A}) \ni F$ に対して

$$\|F\|_b = \sup_{\pi \in \text{Rep } \mathcal{L}(G; \mathcal{A})} \|\pi(F)\|$$

とおくと $\|\cdot\|_b$ は $\mathcal{L}(G; \mathcal{A})$ 上の *C^* norm* となり

$$G \otimes_b \mathcal{A} = \overline{(\mathcal{L}(G; \mathcal{A}), \|\cdot\|_b)}$$

とおき \mathcal{A} の G による C^* 接合積 と呼ぶことにする。 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ の場合は G の *enveloping C^* algebra* $C^*(G)$ である。 ([26])

さらに $\mathcal{L}(G; \mathcal{A}) \ni F$ に対して

$$\|F\|_a = \sup_{S \in \text{Rep } \mathcal{A}} \|(\text{Ind } S)(F)\|$$

とおく。ただし $(\text{Ind } S)$ は $(\text{Ind } S)(F)$ の *matrix* 表示が $(\text{Ind } S)(F)_{s,t} = S[S^*(F_{st})]$ なる $\mathcal{L}(G; \mathcal{A})$ から $G \otimes_a \mathcal{A}$ 上への表現を意味する。その時 $\|\cdot\|_a$ も同様にして $\mathcal{L}(G; \mathcal{A})$ 上の *C^* norm* となり

$$G \otimes_a \mathcal{A} = \overline{(\mathcal{L}(G; \mathcal{A}), \|\cdot\|_a)}$$

とおきこの *C^* algebra* を reduced C^* 接合積 と呼ぶことにする。

([26]) これは *Tuymaev* による C^* 接合積に一致する。 ([26])

しかも $(G \otimes_a \mathbb{C})^\wedge = \hat{G}_r$ となる。 ([26])

§ 3. Extension property と property T

先ず Tomiyama ([24]) による extension property (略して (EP) と書く) を接合積の中に持ち込んだ話をしよう。 \mathcal{A} を unital C^* -algebra とする。今 \mathcal{A} が (EP) を持つ (略して $\mathcal{A} \in (EP)$ と書く) と云うのを \mathcal{A} を含む任意の unital C^* -algebra \mathcal{B} に対して \mathcal{B} から \mathcal{A} への expectation e が存在する時を云う。 \mathcal{A} が \mathcal{A} 上の von Neumann algebra の時は $\mathcal{A} \in (EP)$ なる必要かつ十分な条件は $\mathcal{A}(\mathcal{A})$ から \mathcal{A} への expectation e が存在することである。 ([24]) これを使って次の定理を証明する

定理 1. M を \mathcal{A} 上の finite von Neumann algebra とし Γ を M 上の countable discrete group とする。そして τ を normalized な normal Γ -invariant trace ($\text{tr } M$) とする。その時 $\Gamma \otimes M \in (EP)$ なる為の必要十分条件は $M \in (EP)$ かつ Γ が amenable であることである。

証明:

もし $\Gamma \otimes M \in (EP)$ なら $\mathcal{A}(\Gamma \otimes \mathcal{A})$ から $\Gamma \otimes M$ への expectation π が存在する。 $\mathcal{A}(\mathcal{A})$ から M への expectation π とし

$$\pi = \Phi^{-1} \circ e \circ \pi \circ \Phi$$

とおけばよい。ただし Φ は $\mathcal{A}(\mathcal{A})$ から $\mathcal{A}(\Gamma \otimes \mathcal{A})$ への amplification であり、 e は $\Gamma \otimes M$ から M への canonical expectation である。よって $M \in (EP)$ である。次に Γ が amenable を云う為の次の補題

をおく。

補題 2. ([3]) $\mathcal{L}^\infty(G)$ から $\mathcal{L}(G \otimes Y)$ への *positive linear map* で次の性質を満たすものが存在する。

$f \mapsto A_f$ を求めるものとする $A_1 = I$, $(g \otimes 1) A_f (g \otimes 1)^* = A_{f_g}$ かつ $f_g(h) = f(hg)$ なる $\mathcal{L}^\infty(G)$ の *element* である。

証明:

$$A_f(\sum g \otimes x_g) = \sum_g f(g) g \otimes x_g \quad \text{とおけばよい。}$$

さて本論に戻って

$$\tilde{\tau}[\sum g \otimes x_g] = \sum_g \delta_{g,e} \tau(x_g)$$

とおくと、 $\tilde{\tau}$ は $G \otimes M$ 上の *normalized normal trace* となる。そこで $\mathcal{L}^\infty(G)$ 上の *function* μ を

$$\mu(f) = \langle A_f, {}^t \tilde{\pi}(\tilde{\tau}) \rangle \quad (f \in \mathcal{L}^\infty(G))$$

とおく。ただし A_f は補題 2 に於ける $G \otimes Y$ 上の *operator* である。 ${}^t \tilde{\pi}$ は $\tilde{\pi}$ の *transpose map* である。その時 μ は $\mathcal{L}^\infty(G)$ 上の *mean* になることは明らかである。さらに

$$\begin{aligned} \mu(f_g) &= \langle A_{f_g}, {}^t \tilde{\pi}(\tilde{\tau}) \rangle = \langle (g \otimes 1) A_f (g \otimes 1)^*, {}^t \tilde{\pi}(\tilde{\tau}) \rangle \\ &= \langle (g \otimes 1) \tilde{\pi}(A_f) (g \otimes 1)^*, \tilde{\tau} \rangle = \langle \tilde{\pi}(A_f), \tilde{\tau} \rangle \\ &= \mu(f) \quad (g \in G) \end{aligned}$$

よって μ は $\mathcal{L}^\infty(G)$ 上の *right invariant mean* となり G は *amenable* になる。

逆に $M \in (EP)$ とし G を *amenable* とすると、Tomiyama ([24]) により

$M' \in (E.P)$ より $L(\mathcal{Y})$ から M' への expectation π' が存在する。さらに $L(\mathbb{G} \otimes \mathcal{Y})$ から $L(L^1(\mathbb{G})) \otimes M'$ への expectation $L \otimes \pi'$ で $(L \otimes \pi')(x \otimes y) = x \otimes \pi'(y)$ なる条件を満たすものが存在する。 $L(L^1(\mathbb{G})) \otimes M' = (I \otimes M)'$ より任意の $X \in L(\mathbb{G} \otimes \mathcal{Y})$ に対して $(L \otimes \pi')(X) \in (I \otimes M)'$ かつ

$$(1) \quad (g \otimes 1)(L \otimes \pi')(X)(g \otimes 1) \in (I \otimes M)'$$

\mathbb{G} は amenable より invariant measure μ が \mathbb{G} 上に存在する。ゆえに (1) より

$$(2) \quad \int_{\mathbb{G}} (g \otimes 1)(L \otimes \pi')(X)(g \otimes 1)^* d\mu(g) \in (I \otimes M)'$$

又 $h \otimes 1 \in \mathbb{G} \otimes 1$ に対して

$$\begin{aligned} (h \otimes 1) \left\{ \int_{\mathbb{G}} (g \otimes 1)(L \otimes \pi')(X)(g \otimes 1)^* d\mu(g) \right\} (h \otimes 1)^* \\ = \int_{\mathbb{G}} (hg \otimes 1)(L \otimes \pi')(X)(hg \otimes 1)^* d\mu(g) \\ = \int_{\mathbb{G}} (g \otimes 1)(L \otimes \pi')(X)(g \otimes 1)^* d\mu(g) \end{aligned}$$

よって (2) より

$$(3) \quad \int_{\mathbb{G}} (g \otimes 1)(L \otimes \pi')(X)(g \otimes 1)^* d\mu(g) \in (\mathbb{G} \otimes M)'$$

よって

$$(4) \quad \overline{\text{span}} \{ \sigma(L \otimes \pi')(X)\sigma^*; \sigma \text{ は } \mathbb{G} \otimes M \text{ の unitary} \} \cap (\mathbb{G} \otimes M)' \neq \emptyset$$

Tomiyama ([24]) により (4) から $(I \otimes M)'$ より $(\mathbb{G} \otimes M)'$ への expectation $\tilde{\pi}'$ が存在する。

$$\tilde{\pi}' = \mathcal{S} \circ (L \otimes \pi')$$

とおくと $\tilde{\pi}'$ は $L(\mathbb{G} \otimes \mathcal{Y})$ から $(\mathbb{G} \otimes M)'$ への expectation である。ゆえに $(\mathbb{G} \otimes M)' \in (E.P)$ かつ $\mathbb{G} \otimes M \in (E.P)$ となり証明が終る。

これは次の系の拡張になっていると考えられる。

系3. ([4]) G を countable discrete group とする。その時 G による group von Neumann algebra $W(G)$ が (EP) を持つ為の必要十分な条件は G が amenable となることである。

この系に関連して極最近 Lance は $C^*(G)$ が Property T を持つ為の必要条件は G が amenable である、という結果を出したが、これは C^* 接合積の中に話を持ち込むことが出来ることを以下に述べよう。ただしここでいう Property T と云うのは A を C^* algebra とし、 A が Property T を持つと云うのを (以下 $A \in (T)$ と書く) 任意の C^* algebra B に対して $A \otimes B = A \otimes_{\mathbb{C}} B$ が成り立つことをそういうのである。 ([20])

さて次のことを示そう。(証明は Takesaki によるところが多い)

定理4. A を separable C^* algebra とし G をその上の discrete automorphism group とする。その時 $G \otimes A \in (T)$ なる為の必要十分な条件は $A \in (T)$ で G が amenable となることである。

証明:

もし $G \otimes A \in (T)$ ならば任意の C^* algebra B に対して

$$A \otimes B \subset (G \otimes A) \otimes B,$$

ただし \otimes は代数的な tensor product を意味する。 $(G \otimes A) \otimes B$ 上では $\alpha = \nu$ より $A \otimes B$ 上では $\alpha = \nu$ 、よって $A \in (T)$ となる。次に G が amenable になることを示す。 π を A の G 上への standard 表現とし、

\mathcal{J} を \mathcal{A} 上の *involution* とする. (G, \mathcal{A}) の *covariant* 表現を次の様に定義する:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(s)\xi)(t) &= \xi(ts), & (\pi(x)\xi)(t) &= \pi \cdot tx \xi(t) \\ (\tilde{\mathcal{R}}(s)\xi)(t) &= \xi(st), & (\tilde{\pi}(x)\xi)(t) &= \mathcal{J} \pi \cdot t^* x \mathcal{J} \xi(t^*) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\left(\begin{array}{l} t, s \in G, x \in \mathcal{A} \\ \xi \in \mathcal{L}^1(G) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H} \end{array} \right)$$

さらに $G \otimes \mathcal{A} \rightarrow H$ に対して

$$\pi(H) = \sum_{g \in G} \tilde{\pi}(H_g) \mathcal{L}(g)$$

$$\tilde{\pi}(H) = \sum_{g \in G} \tilde{\pi}'(H_g) \tilde{\mathcal{R}}(g)$$

とおくと、 $\pi, \tilde{\pi}$ は $G \otimes \mathcal{A}$ の $\mathcal{L}^1(G) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$ 上の表現となる。明らかに $\pi, \tilde{\pi}$ は可換より $(G \otimes \mathcal{A}) \hat{\otimes} (G \otimes \mathcal{A})$ の $\mathcal{L}^1(G) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$ 上への表現 π_0 で次の条件を満たすものが存在する:

$$\pi_0(H \otimes G) = \pi(H) \tilde{\pi}'(G) \quad (H, G \in G \otimes \mathcal{A})$$

π_0 の作り方より $\pi_0|_{G \times G} = \mathcal{L} \times \tilde{\mathcal{R}}$ より $\mathcal{L} \times \mathcal{R}$ に *quasi-equivalent* である。ただし \mathcal{L}, \mathcal{R} はそれぞれ G から $\mathcal{L}^1(G)$ 上の *left regular*, *right regular* 表現である。今仮定より $G \otimes \mathcal{A} \in (T)$ だから次のことが成立する:

$$(G \otimes \mathcal{A}) \hat{\otimes} (G \otimes \mathcal{A}) = (G \otimes \mathcal{A}) \hat{\otimes}_Q (G \otimes \mathcal{A}),$$

だから π_0 は α -norm に関して *continuous* である。よって $\mathcal{L} \times \mathcal{R}$ は α -norm に関して *continuous* である。だから Lance のよって G は *amenable* である。逆に $\mathcal{A} \in (T)$ で G が *amenable* とすると、

Zeller-Meier によつて $G \otimes_{\alpha} \mathcal{A} = G \otimes_{\alpha} \mathcal{A}$ である。 $\mathcal{A} \in (\mathbb{T})$ だから、
任意の C^* -algebra B に対して

$$\begin{aligned} (G \otimes_{\alpha} \mathcal{A}) \hat{\otimes}_{\alpha} B &= G \otimes_{\alpha} (\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\alpha} B) = G \otimes_{\alpha} (\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\alpha} B) \\ &= G \otimes_{\alpha} (\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\alpha} B) = (G \otimes_{\alpha} \mathcal{A}) \hat{\otimes}_{\alpha} B \\ &= (G \otimes_{\alpha} \mathcal{A}) \hat{\otimes}_{\alpha} B, \end{aligned}$$

よつて $G \otimes_{\alpha} \mathcal{A} \in (\mathbb{T})$ となる。

証明終。

注: C^* -algebra の type (I) の話も同様に出来るように思われる。

§ 4. (Inequivalent non approximately finite groups

Krieger は ([15]) の中で inequivalent な non approximately finite な
二つの group を与えたが、ここでは Choda の結果を用いて三
つの inequivalent な non approximately finite group の example を
与える。 先ず Dye と Haga ([9], [27]) による full group の話を
少ししておく。 M を von Neumann algebra とし G をその
上の countable automorphism group とする。 今 $[G]$ を次の様に定
義する:

$$[G] = \{ \alpha \in \text{Aut}(M); \sup_{p \in G} F(\alpha, p) = 1 \},$$

ただし

$$F(\alpha, p) = \text{largest } \{ p \in (M \cap M')^p \mid \alpha \upharpoonright p; \text{ inner on } M_p \}$$

と定義する。 $[G]$ は G を含む group になり $[G] = [G]$ を満たす。
 この group を G による full group という。 さて今 M_α を von Neumann algebra (i.e.) とし α, β をそれぞれ M_1, M_2 上の automorphism とする。 Φ を M_1 から M_2 上への isomorphism とした時 $\Phi(\alpha), \Phi^{-1}(\beta)$ を次の様に定義する:

$$\Phi(\alpha) = \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}, \quad \Phi^{-1}(\beta) = \Phi^{-1} \circ \beta \circ \Phi$$

その時 $\Phi(\alpha), \Phi^{-1}(\beta)$ はそれぞれ M_2, M_1 上の automorphism となる。
 この notation を使って Dye による weak-equivalence の notion を導入する。 G_α を M_α 上の countable automorphism group とする。(i.e.) G_1 と G_2 が equivalent (Dye による weakly equivalent) であると言うのを M_1 から M_2 上への isomorphism Φ で次の条件を満たす時を言う:

$$[\Phi^{-1}(G_2)] = [G_1].$$

equivalence の特徴付けとして Choda による次の定理がある:

定理 5. (i.e.) M_α を abelian von Neumann algebra とし、 τ_α を M_α 上の normalized faithful normal trace とし、 G_α を τ_α -preserving な M_α 上の countable freely acting automorphism group とする。その時、 G_1 と G_2 が equivalent である為の必要十分条件は $G_1 \otimes M_1$ から $G_2 \otimes M_2$ 上への isomorphism Φ が存在して次の条件を満足することである:

$$\Phi(M_1) = M_2.$$

これによりもし $G \otimes M_1$ から $G \otimes M_2$ への isomorphism が存在しないならば G_1 と G_2 は inequivalent である。一方 Dye による group の approximate finiteness について少し述べる。〔9〕 (X, Σ, μ) を standard normalized measure space とし G をその上の countable freely acting automorphism group とする。 G が approximately finite であると言うのを任意の $\varepsilon > 0$ と G の元 $(g_i)_{i=1}^n$ に対して G の finite subgroup G_0 と G_0 の元 $(h_i)_{i=1}^n$ で次の条件を満たすものが存在することである：

$$\sup_{E \in \Sigma} \mu(E g_i \Delta E h_i) \leq \varepsilon \quad (1 \leq i \leq n).$$

Dye により G が non approximately finite である為の十分条件は G の subset H と元 $(g_i)_{i=1}^n$ で

$$(*) \quad H \cup g_i H = G, \quad g_i H \cap g_j H = \phi, \quad g_i H \cup g_j H \subset g_k H.$$

なるものが存在することである。例えば \mathbb{Z} を $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ から生成される free group とすると $H = \{u^n \dots | n \neq 0\}$, $g_1 = u$, $g_2 = v$, $g_3 = uv^{-1}$ とおくと (*) を満たすから \mathbb{Z} は non approximately finite group である。

〔9〕 Π を finite permutation group とする。その時、Murray-von Neumann により $\mathbb{Z} \rtimes \Pi$ はそれぞれ或る maximal abelian von Neumann algebra 上の trace preserving な freely acting, ergodic automorphism group として表現される。その algebra を A, B とすると、よく知られているように $\Pi \otimes B$ は Property P を持ち $\mathbb{Z} \otimes A$ は持たない。〔17〕 \Rightarrow 一方 Saito により $(\mathbb{Z} \rtimes \Pi) \otimes (A \otimes B)$ は

$(\mathbb{Q} \otimes A) \otimes (\mathbb{T} \otimes B)$ に isomorphic より ([17]), Missonou の結果より、
 $(\mathbb{Q} \times \mathbb{T}) \otimes (A \otimes B)$ は Property P を持つ。([16]) よって定理 5 を使
と次の Krieger の結果を得る:

定理 6. ([15]) \mathbb{Q} と $\mathbb{Q} \times \mathbb{T}$ は互いに inequivalent な non approximately
finite な countable freely acting ergodic group である。

さてこの目的の group を作る為次に一連の補助定理を証明す
に述べる:

先ず Bures によるものとして

補助定理 7. ([1]) A_n を maximal abelian von Neumann algebra と
し、 G_n をその上の freely acting ergodic automorphism group とす
る。さらに x_n を A_n に対する separating \mathfrak{A} generating unit vector
とすると、($n \geq 1$)

① G_n の restricted direct product $\prod_n G_n$ は (x_n) -adic tensor
product $\otimes_n^{(x_n)} A_n$ 上の freely acting ergodic group となる。

②

$(\prod_n G_n) \otimes (\otimes_n^{(x_n)} A_n)$ は $\otimes_n^{(e_n \otimes x_n)} (G_n \otimes A_n)$ に同型
となる。ただし e_n は G_n の unit element である。

次に Sakai によるものとして

補助定理 8. ([20]) M を finite factor とすると M の \mathbb{C} -adic
tensor product $\otimes_n^{\mathbb{C}} M_n$ ($M_n = M$) は asymptotically abelian であ
る。(略して $\otimes_n^{\mathbb{C}} M_n \in (AA)$ と書く)

\mathbb{Q} , $(\mathbb{Q} \times \Pi)$ をそれぞれ \mathcal{A} , \mathcal{B} 上で作用しているとする

補助定理 9. $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}$, $(\mathbb{Q} \times \Pi) \otimes \mathcal{B} \notin (A.A)$

これだけの準備をして主結果を述べると

定理 10. \mathbb{Q} による *restricted direct product* $\bigsqcup_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ は \mathbb{Q} , $\mathbb{Q} \times \Pi$ に *inequivalent* な *non approximately finite countable freely acting ergodic group* である。

証明:

x を \mathcal{A} に対する *generating* かつ *separating unit vector* とする。補助定理 7 (iii) により

$(\bigsqcup_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}) \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}}^{(x)} \mathcal{A}$ は $\bigotimes_{\mathbb{N}}^{(x)} (\mathbb{Q} \otimes \mathcal{A})$ に同型で $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}$ は *finite factor* より補助定理 8 により $(\bigsqcup_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}) \otimes (\bigotimes_{\mathbb{N}}^{(x)} \mathcal{A})$ は (A.A) を持つ。一方補助定理 9 により $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}$, $(\mathbb{Q} \times \Pi) \otimes \mathcal{B}$ は (A.A) を持たない。よって定理 5 により $\bigsqcup_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ は \mathbb{Q} , $\mathbb{Q} \times \Pi$ に *inequivalent* である。 *non approximately finite* は明らかである。 証明終。

注: Ching により *inequivalent* な *non approximately finite group* の個数は連続濃度程有るらしいように思われる。 [6]

§ 5. *Modular automorphism and algebraic invariant T.*

最後に Connes の導入した *algebraic invariant T* について、これを接合積に持ち込んだ話をして話を終ります。

極最近 Connes は faithful normal state に depend する modular automorphism は inner を除いて決まることを示した。([7]) さらに彼は algebraic invariant T を導入して種々の性質をまとめた。([8])

今 M を σ -finite G -finite von Neumann algebra とする。これは faithful normal G -invariant state ϕ が存在することと同値である。ただし G は M 上の countable automorphism group とする。 ϕ を ϕ に depend して決まる modular automorphism とすると、Takesaki により ϕ は G -invariant だから ϕ と G は互いに elementwise に可換である。([9]) だから次の automorphism が $G \otimes M$ 上に定義される：

$$(1) \quad (L \otimes 0_{\phi}^{\phi})(\sum x_i \otimes x_j) = \sum x_i \otimes \phi(x_j).$$

今 Gelfond-Segal 表現により $\phi = \omega_{\xi}$ と仮定できる。ただし ω_{ξ} は separatingかつ generating unit vector ξ に対する vector state である。

さて modular automorphism について、 ω_{ξ} は $G \otimes M$ に対する separatingかつ generating unit vector より ω_{ξ} に対する modular automorphism $\sigma_t^{\omega_{\xi}}$ は次の様になる。ただし e は G の unit element である。

補助定理 11.

$$\sigma_t^{\omega_{\xi}} = L \otimes 0_{\xi}^{\xi} \quad (t \in \mathbb{R})$$

証明：

$\omega_{\otimes \xi}$ が $L \otimes \mathcal{O}_X^{\otimes \xi}$ に対して KMS 条件を満たすことを示す。

$$\begin{aligned} \omega_{\otimes \xi}[(L \otimes \mathcal{O}_X^{\otimes \xi})(\sum_g f \otimes x_g)(\sum_h h \otimes y_h)] &= \sum_g \langle f \cdot \mathcal{O}_X^{\otimes \xi}(x_g) y_{g+1} | \xi \rangle \\ &= \sum_g \mathcal{F}[\mathcal{O}_X^{\otimes \xi} \cdot f(x_g) y_{g+1}], \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \omega_{\otimes \xi}[(\sum_h h \otimes y_h)(L \otimes \mathcal{O}_X^{\otimes \xi})(\sum_g f \otimes x_g)] &= \sum_g \langle f(y_{g+1}) \mathcal{O}_X^{\otimes \xi}(x_g) | \xi \rangle \\ &= \sum_g \mathcal{F}[y_{g+1} \cdot \mathcal{O}_X^{\otimes \xi}(f(x_g))]. \end{aligned}$$

\mathcal{F} は $\mathcal{O}_X^{\otimes \xi}$ に対する KMS state より、 $(f(x_g), y_{g+1})$ に対して $B = \{0 \leq \operatorname{Im} z\}$ 上で bounded continuous function F_g で B の中で holomorphic であり次の条件を満たすものが存在する:

$$F_g(t) = \mathcal{F}[\mathcal{O}_X^{\otimes \xi} \cdot f(x_g) y_{g+1}], \quad F_g(t+i) = \mathcal{F}[y_{g+1} \cdot \mathcal{O}_X^{\otimes \xi} \cdot f(x_g)] \quad (t \in \mathbb{R}).$$

そこで G は countable より $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ としよ。

$$\tilde{F}_n(z) = \sum_{i=1}^n F_{g_i}(z)$$

とおくと \tilde{F}_n は B 上で bounded continuous で B の中で holomorphic となる。又 $\{F_n(t)\}_n$ と $\{\tilde{F}_n(t+i)\}_n$ はそれぞれ uniformly bounded で $\mathbb{R}, \mathbb{R}+i$ 上で uniformly converge する。よって maximum-modulus theorem により $\{\tilde{F}_n\}_n$ は或る bounded function $F(z)$ に uniformly converge する。ゆえに F は B 上で continuous であり、 B の中で holomorphic である。さらに

$$F(t) = \sum_g F_g(t) = \omega_{\otimes \xi}[(L \otimes \mathcal{O}_X^{\otimes \xi})(\sum_g f \otimes x_g)(\sum_h h \otimes y_h)]$$

$$F(t+i) = \sum_g F_g(t+i) = \omega_{\otimes \xi}[(\sum_h h \otimes y_h)(L \otimes \mathcal{O}_X^{\otimes \xi})(\sum_g f \otimes x_g)].$$

\mathcal{F} は $\mathcal{O}_X^{\otimes \xi}$ -invariant より $\omega_{\otimes \xi}$ は $L \otimes \mathcal{O}_X^{\otimes \xi}$ -invariant になる。よって

uniquenessにより $\varphi_t^{\otimes 2} = \psi \otimes \varphi_t$ となる。 証明終。

さて次に Connes により導入された T の話を少ししよう。 M を任意の von Neumann algebra とする。

$$T(M) = \{T \in \mathbb{R} \mid \text{ある faithful normal state } \varphi \text{ に対して } \varphi_T = \psi\}$$

として $T(M)$ を定義するとこれは \mathbb{R} の sub-(additive) group となる。 ([7]) さらに $T \in T(M)$ である為の必要十分条件は φ_T を inner にするような faithful normal state φ が存在することである。 ([7]) 話を接合積にもどすと $T(G \otimes M)$ は次のように特徴付けることができる：

補助定理 12. M を σ -finite G -finite von Neumann algebra とし ξ を M に対する separatingかつ generating unit vector とし、 ω_ξ を G -invariant とすると、 $T_0 \in T(G \otimes M)$ である為の必要かつ十分な条件は次の条件を満たす family $(a_g)_{g \in G}$ が M の中に存在することである：

$$(i) \sum_g a_g^* a_g = 1 = \sum_g a_g a_g^*, \quad (ii) \varphi(a_h) = a_{gh} a_g^{-1} \quad (iii) \varphi_{T_0}^\xi(x) a_g = a_g \varphi(x) \\ (g, h \in G, x \in M)$$

証明：

$T_0 \in T(G \otimes M)$ ならば $\varphi_{T_0}^\xi = \psi \otimes \varphi$ なる $G \otimes M$ 上の faithful normal state ψ が存在する。 Connes により

$$(2) \quad \varphi_t^{\otimes 2}(x) = u_t \varphi_t^\psi(x) u_t^* \quad (t \in \mathbb{R}, x \in G \otimes M)$$

なる $G \otimes M$ の unitary operator u_t ($t \in \mathbb{R}$) が存在する。 補助定理 11

と(2)によって

$$(3) \quad (1 \otimes \sigma_{T_0}^{\otimes \infty})(x) = U_{T_0} x U_{T_0}^* \quad (x \in G \otimes M)$$

U_{T_0} は unitary operator であり

$$U_{T_0} = \sum g \otimes a_g \quad (\text{with } \tilde{\omega}_g\text{-norm})$$

とすると $\sum g a_g^* a_g = 1 = \sum a_g a_g^*$ は明らかである。又(3)によつて

て

$$g \otimes 1 = (1 \otimes \sigma_{T_0}^{\otimes \infty})(g \otimes 1) = U_{T_0} (g \otimes 1) U_{T_0}^* \quad (g \in G)$$

よって $g(a_h) = a_h g a_h^{-1}$ を得る。さらに

$$1 \otimes \sigma_{T_0}^{\otimes \infty}(x) = U_{T_0} (1 \otimes x) U_{T_0}^* \quad (x \in M)$$

よって $\sigma_{T_0}^{\otimes \infty}(x) a_g = a_g g(x)$ を得る。逆は $U = \sum g \otimes a_g$ とおくと

$\sum a_g^* a_g = 1 = \sum a_g a_g^*$ より U は $G \otimes M$ 上の unitary operator となる。又(3)

(3) により $\sigma_{T_0}^{\otimes \infty}(x) = U x U^* \quad (x \in G \otimes M)$ となり Connes より T_0 は

$T(G \otimes M)$ に属する。

証明終。

この補助定理により次の主結果を証明する:

定理13. M を σ -finite G -finite von Neumann algebra とする。ただし G は M 上の countable automorphism group とする。
 H を G の subgroup として次の条件を満たすとする:

$G \setminus H \ni g$ に対して

$C_g = \{h g h^{-1} \mid h \in G\}$ は infinite である。

その時

$$T(G \otimes M) \subset T(H \otimes M)$$

証明:

$T(G \otimes M) \ni T_0$ に対して、補助定理12より

$$\text{(i)} \quad \sum a_g^* a_g = 1 = \sum a_g a_g^*, \quad \text{(ii)} \quad h(a_g) = a_{hg} h^{-1}, \quad \text{(iii)} \quad \mathcal{P}_{T_0}^{\xi}(x) a_g = a_g \mathcal{P}(x) \\ (g, h \in G, x \in M)$$

なる M の family $(a_g)_{g \in G}$ がとれる。ただし ξ は M に対する cyclic かつ separating unit vector ξ は G -invariant である。

今も $G \setminus H$ の或る element g_0 に対して $a_{g_0} \neq 0$ とすると、 \mathcal{P} は G -invariant より、(iii) の条件から

$$(4) \quad 0 \neq \mathcal{P}(a_{g_0}^* a_{g_0}) = \mathcal{P}[h(a_{g_0})^* h(a_{g_0})] = \mathcal{P}(a_{hg_0 h^{-1}}^* a_{hg_0 h^{-1}}) \quad (h \in G),$$

仮定より C_{g_0} は infinite であり、(4) から

$$+\infty = \sum_{h \in G} \mathcal{P}(a_{g_0}^* a_{g_0}) = \sum_{h \in G} \mathcal{P}(a_{hg_0 h^{-1}}^* a_{hg_0 h^{-1}}) \\ \leq \sum_{g \in G} \mathcal{P}(a_g^* a_g) = \mathcal{P}[\sum_g a_g^* a_g] = \mathcal{P}(1) = 1$$

これは矛盾。よって $G \setminus H \ni g$ に対して $a_g = 0$ となる。だから補助定理12により $T_0 \in T(H \otimes M)$ となる。証明終

$H = \{e\}$ とした時上の定理より次の系を得る:

系14. G を ICC-group とした時
 $T(G \otimes M) \subset T(M)$

が成り立つ。

注: 補助定理11より $\Delta_{G \otimes M}^{\text{it}} = 1 \otimes \Delta_M^{\text{it}}$ を得られると思われるので $S(G \otimes M) \subset S(M)$ が十分多くの faithful normal G -invariant state が M 上に存在する時成り立つように思われる。ただし

$$S(M) = \bigcap_{\mathfrak{S}, \text{ faithful normal state of } M} \sigma(\Delta_{\mathfrak{S}})$$

である。[8]

最近の情報によれば Connes は G -invariant で ~~ある~~ 場合、 M を abelian として $T(G \otimes M)$, $S(G \otimes M)$ について解析しているそうです。

参考文献

- [1] D.J.C. Bures : Certain factors constructed as infinite tensor products, *Comp Math.*, 15, 169-191 (1963).
- [2] H. Choda : On the crossed product of abelian von Neumann algebras II, *Proc. Japan Acad.*, 43, 198-201 (1967).
- [3] H. Choda and M. Echigo : Some Remarks on von Neumann algebras with Property Q, *memoirs of Osaka Gakugei University*, 13, 13-21 (1964).
- [4] M. Choda and H. Choda : A remark on a construction of finite factors I, II, *Proc. Japan. Acad.*, 40, 471-478 (1964), 479-481 (1964).

- [5] W. Ching: Non-isomorphic non-hyperfinite factors, *Canad. J. Math.*, 21, 1293-1308 (1969).
- [6] _____: A continuum of non-isomorphic non-hyperfinite factors, *Comm on pure and applied. Math.*, **XXIII**, 921-937 (1970).
- [7] A. Connes: Groupe modulaire d'une algèbre de genre dénombrable, to appear.
- [8] _____: Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann, *C.R. Acad. Paris, Ser. A* 273, 900-903 (1971).
- [9] H.A. Dye: On groups of measure preserving transformations I, *Amer. J. Math.*, 81, 119-159 (1959).
- [10] E.G. Effros and F. Hahn: Locally compact transformation groups and C^* -algebras, *memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 75 (1967).
- [11] J. Glimm: ~~On~~ Families of induced representations, *Pacific J. Math.*, 12 (1962) 885-911.
- [12] A. Guichardet: Caractères des algèbres de Banach involutives, *Ann. Inst. Fourier*, 13, (1963) 1-81.
- [13] _____: Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'anticommution. *Ann. Soc. École Norm. Sup.*,

- [14] M. Henle: Galois theory of W^* -algebras, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [15] W. Krieger: On the isomorphy problem for ergodic equivalence relations, *Math. Z.*, 103, (1968) 78-84.
- [16] Y. Misonou: On divisors of factors, *Tohoku Math. J.*, 3, (1951) 132-135.
- [17] F. J. Murray and J. von Neumann: On rings of operators III, IV, *Ann. Math.*, 41, (1940) 94-161, 44, (1943) 716-808.
- [18] M. Nakamura and Z. Takeda: A Galois theory for finite factors, *Proc. Japan Acad.*, 36 (1960) 258-260.
- [19] T. Saitô: The direct product and crossed product of rings of operators, *Tohoku Math. J.*, 11, (1959) 229-304.
- [20] S. Sakai: Asymptotically abelian II_1 -factors, *Publ. Res. Inst. Soc.*, 4, (1968) 299-307.
- [21] M. Takesaki: Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, *Lecture notes in mathematics 128*, Springer-Verlag (1970).
- [22] ■ _____: On the cross-norm of the direct product of C^* -algebras, *Tohoku Math. J.*, 16, 111-122 (1964).
- [23] _____: Covariant representations of C^* -algebras and their locally compact automorphism groups,

Acta. math., 119, (1967) 273-303.

- [24] J. Tomiyama: Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Lecture note, Univ of Copenhagen., (1970).
- [25] T. Tsurumaru: On the crossed product of operator algebras, *Johoku math. J.*, 10, (1958) 355-365.
- [26] G. Zeller-Meier: Produits croisés d'une C^* -algèbre par un groupe d'automorphismes, *J. math. pures et appl.*, 47, ~~101-239~~ (1968) 101-239.
- [27] Y. Haga and S. Takeda: Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, *Johoku math. J.*, 24 (1972) 167-190.