

von Neumann 代数の自己同型写像群と  
不変汎函数について

東北大理 斎藤 知之

von Neumann 代数  $M$  の  $*$  自己同型写像群  $G$  を dual pair  $(M_*, M)$  ( $M_*$  は  $M$  の predual) の中で, 非可換力学系の変換群としてとらえるべく,  $G$  不変正規正值線形汎函数 (不変測度) の存在条件を  $M_*$  の弱 compact 集合を使用して調べ, あわせて  $M$  に与える " $G$ -有限性" (不変測度が充分沢山ある) と Murray-von Neumann の "有限性" の差を浮き彫りにしよう。

$M$  を Hilbert space  $\mathcal{H}$  上に作用する von Neumann 代数 (v. N. 代数) とし,  $G$  を  $M$  の unitarily implement された  $*$ -automorphisms の a group とする。すなわち  $g \rightarrow U_g$  ( $G$  の  $\mathcal{H}$  上の unitary 表現) が  $U_g^* M U_g = M_g$  ( $\forall g$ ) を満たして存在する。今後  $a_g = U_g^* a U_g$   $\forall a \in M$  と書く。

Definition 1 (Størmer). 今  $e, f$  を  $M$  の射影元とし,  $e \stackrel{G}{\sim} f$  ( $G$ -equivalent) であるとするのは, 各  $g \in G$  に対して,  $e = \sum_{j \in G} a_j a_j^*$ ,  $f = \sum_{j \in G} U_j^* a_j^* a_j U_j$  なる  $a_j \in M$  が存在するとき

であり,  $e \stackrel{G}{\sim} f$  ( $e \stackrel{G}{\sim} f$ ) とは,  $ecf$  の,  $fce$  と  $G$ -equivalent な部分射影元の存在するときである。

●  $M$  と  $G$  の接合積を使用することにより上の  $\stackrel{G}{\sim}$  は確かに同値関係になりさらに完全加法的であることがわかる。すなわち  $\{e_\alpha\}, \{f_\alpha\}$  を  $M$  の射影元の直交族とし各  $\alpha$  に対して,  $e_\alpha \stackrel{G}{\sim} f_\alpha$  ならば,  $\sum e_\alpha \stackrel{G}{\sim} \sum f_\alpha$  である。

●  $M$  が abelian,  $\sigma$ -finite の場合, 上の  $\stackrel{G}{\sim}$  は, Hopf の確率空間に導入した equivalence (Hopf-equivalence) と同値になり,  $M$  が一般の場合は, Murray, von Neumann の導入した equivalence ( $\sim$ ) を含む (Størmer [6])。

次に  $\mathcal{U}$  を  $M$  の,  $M$  の unitary 元により implement される inner automorphisms 全体のつくる group とし,  $\tilde{G}$  を  $G$  と  $\mathcal{U}$  により代数的に生成される automorphism group とする。

その時, equivalence relation  $\stackrel{G}{\sim}$  に関して次のような比較定理が成立する。

Proposition 1.  $M$  の射影元の対  $e, f$  に対して,  $M$  の  $\tilde{G}$  による fixed subalgebra  $M^{\tilde{G}}$  ( $M$  の  $G$  による fixed subalgebra を  $M^G$  とし,  $M$  の center を  $\mathcal{Z}$  とすると,  $M^{\tilde{G}} = M^G \cap \mathcal{Z}$ ) の射影元  $z$  が,  $ez \stackrel{G}{\sim} fz$ ,  $e(1-z) \stackrel{G}{\sim} f(1-z)$  なる如く存在する。

● abelian case は, Størmer により示された。[5]

このことを使用すると Murray-von Neumann の equivalence

の場合と同様にして次の命題が成立する。

Proposition 2.  $M$  が  $G$ -finite (i.e.  $1 \stackrel{G}{\sim} e \Rightarrow e=1$ ) ならば、  
もし  $M$  の射影元  $e, f$  に対して、 $e \stackrel{G}{\sim} f$  が成立すれば、 $1-e \stackrel{G}{\sim} 1-f$   
である。

以上の準備のもとに次のことが成立する。

Theorem 1.  $M$  が  $G$ -finite であること、 $M$  が  $\tilde{G}$ -finite  
(i.e.  $M$  に  $\tilde{G}$ -不変 normal states ( $G$ -invariant normal traces)  
が充分沢山存在する) であることは、同値である。

以下この証明をしよう。[9] と類似の方法によつた。

$M$  は  $G$ -finite とする。  
Lemma 1.  $e, f$  を  $M$  の射影元、 $\{e_k\}$  を  $M$  の射影元の単調増加列で、 $e_k \uparrow e$ 、 $e_k \stackrel{G}{\sim} f$  ( $\forall k$ ) とする。この時、 $e \stackrel{G}{\sim} f$  ( $\stackrel{G}{\sim}$  の連続性) である。

証明).  $e_1 \stackrel{G}{\sim} f_1 \leq f$  とする。

$k \geq 1$   $k$  に対して、 $f_1, f_2, \dots, f_k$  ( $M$  の射影元) が、 $f_i f_j = 0$  ( $i \neq j$ ) ( $1 \leq i < j \leq k$ ) 且  $\sum_{i=1}^k f_i \leq f$  且  $e_{i+1} - e_i \stackrel{G}{\sim} f_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ) なる如くとれたとする。  $e_{k+1} \stackrel{G}{\sim} f$  且  $M$  が  $G$ -finite であるから Prop. 2 により  $1 - e_{k+1} \stackrel{G}{\sim} 1 - f$ . 従つて、 $e_k \stackrel{G}{\sim} \sum_{i=1}^k f_i$  によつて、

$$1 - e_{k+1} + e_k \stackrel{G}{\sim} 1 - f + \sum_{i=1}^k f_i$$

よつて Prop. 2 から

$$e_{k+1} - e_k \stackrel{G}{\sim} f - \sum_{i=1}^k f_i.$$

すなわち  $\exists f_{k+1} \in M$ : 射影元、 $e_{k+1} - e_k \stackrel{G}{\sim} f_{k+1} \leq f - \sum_{i=1}^k f_i$ .

}

この操作をつづけることにより,  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  を,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \leq f, \quad e_{i+1} - e_i \stackrel{G}{\sim} f_{i+1} (\forall i)$$

なる如く撰べる。従って,

$$e = e_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (e_{i+1} - e_i) \stackrel{G}{\sim} \sum_{i=1}^{\infty} f_i \leq f.$$

以上。

Lemma 2.  $\mathfrak{A}M$  を Lemma 1 の仮定のもとに  $M$  の pre dual  $M_*$  に於て,  $(T_g \varphi)(a) = \varphi(a^{\sharp})$  ( $\varphi \in M_*$ ,  $a \in M$ ,  $g \in \tilde{G}$ ) とする ( $T_g$  は  $M_*$  の linear isometry)。かくて  $\varphi \in M_*$  に対して,

$$K \equiv \{T_g \varphi; g \in \tilde{G}\}$$

は, weakly  $(\sigma(M_*, M))$  relatively compact である。

(証明) もし  $K$  が compact でなければ [1] により  $M$  の射影元列  $\{e_n\}$  及び正の実数列  $\varepsilon (> 0)$ ,  $\{\varphi_n\} \subset K$  があって

$$|\varphi_n(e_n)| \geq \varepsilon \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。  $\varphi_n = T_{g_n} \varphi$ ,  $f_n = e_n^{\sharp}$  とし,  $f_n \stackrel{G}{\sim} e_n$  である。

今  $p_n \equiv \sum_{m=n}^{\infty} e_m$ ,  $q_n \equiv \sum_{m=n}^{\infty} f_m$  とすれば,  $p_n \downarrow$ ,  $q_n \downarrow$  である。

$g \equiv \bigwedge_{n=1}^{\infty} g_n$  とする。  $n$  fix  $k$  とおくと  $k$  とり,  $r_k = \sum_{i=n}^{n+k} f_i$  とする。

今  $k \geq 1$  と  $r_{k-1} \stackrel{G}{\sim} \sum_{i=n}^{n+k-1} e_i$  を仮定する ( $k=1$  とし  $r_0 = f_n \stackrel{G}{\sim} e_n$ )。

$$r_k = r_{k-1} + (r_{k-1} \vee f_{n+k} - r_{k-1}),$$

$$r_{k-1} \vee f_{n+k} - r_{k-1} \stackrel{G}{\sim} (\sim) f_{n+k} - r_{k-1} \wedge f_{n+k} \leq f_{n+k} \stackrel{G}{\sim} e_{n+k}$$

から  $r_k \stackrel{G}{\sim} \sum_{i=n}^{n+k} e_i$  が成立する。よって,  $r_k \stackrel{G}{\sim} p_n (\forall k)$  から Lemma 1

から  $q_n = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \stackrel{G}{\sim} p_n (\forall n)$  である。従って  $1 - q_n \stackrel{G}{\sim} 1 - p_n$ ,

$\sup_n (1 - f_n) = 1$  かつ, Lemma 1 により  $1 - g \stackrel{G}{\geq} 1$ ,  $M$  の  $G$ -finiteness かつ  $g = 0$  が成立.  $g_n \geq f_n$  より  $f_n \rightarrow 0$  (5) であり,  $|f(f_n)| \geq \varepsilon$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) に矛盾する. 従って,  $K$  は weakly relatively compact である.

□□.

Theorem 1 の証明.  $M$  を  $G$ -finite とし  $\psi \in M_{\tilde{G}}^*$  ( $M_{\tilde{G}}$  の predual) ( $\psi \geq 0$ ) とする extension theorem により  $\varphi \in M_*$   $\varphi \geq 0$ ,  $\varphi(c) = \psi(c) \forall c \in M_{\tilde{G}}$ ,  $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$  とする  $\varphi$  が存在する.  $\Delta$

$\mathcal{Q}(\varphi) \equiv \overline{\text{co}} \{T_g \varphi, g \in \tilde{G}\}$  ( $\overline{\text{co}}$  は  $\{T_g \varphi, g \in \tilde{G}\}$  の strong convex closure) とすれば, Krein - Šmulian の Theorem 及 Lemma 2 により  $\mathcal{Q}(\varphi)$  は weakly compact である.  $\{T_g; g \in \tilde{G}\}$  は  $\mathcal{Q}(\varphi)$  上 non-contracting (distal) であり, affinely independent (i.e.  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{Q}(\varphi), \psi_1 + \psi_2$  は  $\inf_{g \in \tilde{G}} \|T_g \psi_1 - T_g \psi_2\| \geq \delta > 0$  for some  $\delta > 0$ ). 従って, Ryll-Nardzewski の fixed point theorem ([2]) により  $\exists \tilde{\psi} \in \mathcal{Q}(\varphi) : T_g \tilde{\psi} = \tilde{\psi} \forall g \in \tilde{G}$  である.  $\varphi \geq 0$  かつ  $\tilde{\psi} \geq 0$  であり  $\tilde{\psi}$  は  $M$  上の  $G$ -不変 normal state である. 今  $t \neq 0$ ,  $t \in M_{\tilde{G}}$  とする ( $t \geq 0$ ) と,  $\exists \psi \in (M_{\tilde{G}}^*)_*$  state:  $\psi(t) \neq 0$ . よってこの  $\psi$  に対して, 上の  $\tilde{\psi}$  をとると,  $\tilde{\psi}(t) = \psi(t) \neq 0$ . 従って, Kovács - Szűcs の Theorem 1 により, ([3])  $M$  は  $\tilde{G}$ -finite である.

逆は明らかである。

以上。

この定理の  $\sigma$ -finite case は, Størmer により automorphism の分解定理 (free action に関する Kallman の Theorem) を使用して証明されたが複雑であった。Yeadon [9] は,  $G = \mathbb{R}$  の場合上の方法で, normal trace の存在を, dimension function を全然使用せずに証明した。

今こゝで Kovács - Szűcs により与えられた  $G$ -不変測度の存在条件を述べておこう。

Kovács - Szűcs の定理。  $M$  を  $v.N.$  代数とし,  $G$  を  $M$  の  $\ast$ -automorphism group とする。今  $M$  が  $G$ -finite ( $G$ -invariant normal states が  $M$  の正元を分離する) の充分条件がある) ならば,  $\forall \tau \in M$  に対して,

$$\tilde{co}(\tau, M) \cap MG$$

は one point set である (但し  $\tilde{co}(\tau, G)$  は,  $\tau$  の  $G$  による orbit の weak convex hull である)。 $\tau$  に対して  $\tilde{co}(\tau, M) \cap MG$  の unique element を  $\mathbb{E}_G(\tau)$  とすると,  $\tau \rightarrow \mathbb{E}_G(\tau)$  は,  $M$  onto  $MG$  の faithful normal  $G$ -invariant projection of norm one ( $G$ -expectation) であり,  $\forall \sigma \in M$  の  $G$ -invariant normal state  $\sigma$  に対して,

$\sigma = \sigma \circ \mathbb{E}_G$  である。逆に  $M$  onto  $MG$  の  $G$ -invariant expectation があれば,  $M$  は  $G$ -finite であり, その  $G$ -expectation は  $\mathbb{E}_G(\cdot)$  である。

次に  $G$ -finiteness の別の characterization を述べよう。

Theorem 2.  $M$  が  $G$ -finite であるための必要充分条件は、 $M_*$  のかつた  $\tau$  は weakly relatively compact subset  $K$  に対して

$$\{T_g \varphi; \varphi \in K, g \in \tilde{G}\}$$

が又 weakly relatively compact となることである。

● 実は, Stormer は,  $M$  が  $G$ -finite であるための必要充分条件は  $G$  に關して ( $\tilde{G}$  ではない!) Lemma 2 の命題が成立することであることを示した ([7])。

abelian case なら次のように記述できる。

$(X, \mathcal{M}, \mu)$  を  $\sigma$ -finite measure space とし,  $G$  を  $X$  上に left operate する a discrete group  $s \rightarrow s\cdot, s \in X$  とし,  $\mu$  を quasi-invariant, i.e.  $\mu(sE) = 0 \Leftrightarrow \mu(E) = 0$  all  $E \in \mathcal{M}$  とする。

$$d\mu(s\cdot) = r_s(\cdot) d\mu(\cdot) \text{ を Radon-derivative}$$

$$\text{としよう。} \langle a^s, f \rangle = \langle a, r_{s^{-1}}(\cdot) f(s\cdot) \rangle$$

に注意して,

Corollary 1.  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  が Hopf-finite であるための必要充分条件は,  $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  のかつた  $\tau$  は, weakly relatively compact subset  $K$  に対して,

$$\{r_{s^{-1}}(\cdot) f(s\cdot), f \in K, g \in G\}$$

が  $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  で weakly relatively compact になることである。

$G = \mathbb{N}$  の case は 次の様である。

Corollary 2.  $M$  が finite であるための必要充分条件は,  $K \subset M_*$  なる  $\tau$ -weakly relatively compact subset  $K$  に対して,

$$\{T_g \varphi ; \varphi \in K, g \in \mathbb{N}\} = \{u^* \varphi u ; \varphi \in K, u: \text{unitary of } M\}$$

が  $\tau$ -weakly relatively compact となることである。

Corollary 3.  $M$  が finite ならば,  $M$  が  $G$ -finite であるための必要充分条件は,  $\forall K \subset M_*$  weakly relatively compact subset  $K$  に対して,

$$\{T_g \varphi ; g \in G, \varphi \in K\}$$

が  $\tau$ -weakly relatively compact となることである。

Theorem 2 の証明。以下  $M$  が  $G$ -finite を仮定する。

1段。  $\{\varphi_i\} \subset M_*$  :  $\varphi_i \rightarrow \varphi_0$  weakly ( $\varphi_0 \in M_*$ ) とし,  $\{a_n\}$  は  $M$  の unit sphere  $S$  の sequence  $\tau$ -0 に strongly  $K$  収束するものとする。その時,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_i(a_n^*) = 0 \text{ uniformly for } i=1, 2, 3, \dots, \varphi \in \tilde{G}$$

である。

証明)  $\varphi = \sum \frac{|\varphi_i|}{2^i \|\varphi_i\|}$  とし,  $\varphi$  の  $M$  に於ける台を  $e_\varphi$  とし,  $e_\varphi$  の  $M^G \cap \tilde{G} (= M^{\tilde{G}})$  に於ける台を  $Z^G(e_\varphi)$  とする。その時,  $M_{Z^G(e_\varphi)}$  上に  $\tilde{G}$  は natural  $K$  act するから  $M_{Z^G(e_\varphi)}$  は,  $G$ -finite

である。さらに  $M_{Z^G(e_\varphi)}$  は,  $\sigma$ -finite である。このことは,  
 $M_{Z^G(e_\varphi)}$  に於ける  $\tilde{G}$  の fixed subalgebra は,  $(M^G \cap Z)_{Z^G(e_\varphi)}$  であり,  
 従って Kovács の定理から  $M_{Z^G(e_\varphi)}$  onto  $(M^G \cap Z)_{Z^G(e_\varphi)}$   
 の faithful normal  $\tilde{G}$ -invariant projection of norm one  
 が存在するので,  $(M^G \cap Z)_{Z^G(e_\varphi)}$  が  $\sigma$ -finite を示せば充分である。  
 $\varphi$  の  $M^G \cap Z$  に於ける台を  $e_{\varphi'}$  とすると  $Z^G(e_\varphi) \subseteq e_{\varphi'}$  である  
 からこれは明らかである。又  $\varphi_i(a) = \varphi_i(a Z^G(e_\varphi)) \quad \forall a \in M, \forall i$   
 となるから  $M$  を  $\sigma$ -finite と仮定して, 一般性を失なわぬ。  
 よって, Theorem 1 から,  $M$  には, faithful normal  $G$ -invariant  
 trace が存在する。これを  $\tau$  としよう。

$S \ni x, y$  に対して,

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \tau((x-y)^*(x-y))^{1/2}$$

とすると  $(S, d)$  は, complete metric space である。

$$H_i \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in S \mid |\varphi_j(a) - \varphi_0(a)| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq i \}$$

とすれば,  $H_i$  は closed で,  $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$  となる。

従って Baire の Theorem によつて,  $\exists a_0 \in S; \exists \beta > 0$  (real);

$\exists j_0: S \cap \{ a \mid d(a, a_0) \leq \beta \} \subset H_{j_0}$  となる。

$M$  が finite algebra であるから命題を示すには,  $a_n = a_n^*$   
 として一般性を失なわぬ。従つて  $M$  の射影元の列  $\{ e_n \}$  が,  
 $e_n \rightarrow 1$  (cs),  $\| a_n e_n \| \leq \varepsilon/6 \quad n=1, 2, 3, \dots$  なる如く存在する。

$$\| (a_n e_n)^g \| = \| a_n e_n \| \quad \forall g \in \tilde{G} \text{ に注意して,}$$

$$\begin{aligned}
& |(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^j)| \\
& \leq |(\varphi_j - \varphi_0)(e_n^j a_n^j e_n^j)| + |(\varphi_j - \varphi_0)(e_n^j a_n^j (1 - e_n^j))| \\
& \quad + |(\varphi_j - \varphi_0)((1 - e_n^j) a_n^j e_n^j)| + |(\varphi_j - \varphi_0)((1 - e_n^j) a_n^j (1 - e_n^j))| \\
& \leq \varepsilon + |(\varphi_j - \varphi_0)((1 - e_n^j) a_n^j (1 - e_n^j))|
\end{aligned}$$

とある。

今  $b_n(\varphi) \equiv e_n^j a_0 e_n^j + (1 - e_n^j) a_n^j (1 - e_n^j) \in S$  とする。

$$\begin{aligned}
& \tau((b_n(\varphi) - a_0)^*(b_n(\varphi) - a_0))^{1/2} \\
& \leq \tau((1 - e_n^j) a_n^j (1 - e_n^j) a_n^j (1 - e_n^j))^{1/2} \\
& \quad + \tau((1 - e_n^j) a_0^* (1 - e_n^j) a_0 (1 - e_n^j))^{1/2} \\
& \quad + \tau((1 - e_n^j) a_0^* e_n^j a_0 (1 - e_n^j))^{1/2} \\
& \quad + \tau(e_n^j a_0^* (1 - e_n^j) a_0 e_n^j)^{1/2} \\
& \leq 3\tau(1 - e_n^j)^{1/2} + \tau(1 - e_n^j) a_0 e_n^j a_0^* (1 - e_n^j)^{1/2} \\
& \leq 4\tau(1 - e_n^j)^{1/2} = 4\tau(1 - e_n)^{1/2}.
\end{aligned}$$

従って  $\tau(1 - e_n) \rightarrow 0$  (s) かつ  $g_k$  independent  $k \leq n_0(\beta)$  が (自然数) とある。

$$\tau((b_n(\varphi) - a_0)^*(b_n(\varphi) - a_0))^{1/2} < \beta \quad \forall n \geq n_0(\beta).$$

又  $e_n^j a_0 e_n^j \in S$  かつ

$$\tau((e_n^j a_0 e_n^j - a_0)^*(e_n^j a_0 e_n^j - a_0))^{1/2} \leq 3\tau(1 - e_n)^{1/2}$$

かつ  $\exists n_1(\beta)$  ( $g_k$  independent) (自然数) :

$$3\tau(1 - e_n)^{1/2} < \beta \quad \forall n \geq n_1(\beta).$$

今  $n \geq n_0(\beta) \vee n_1(\beta)$  とすると、

$$|(\varphi_j - \varphi_0)((1 - e_n^g) a_n^g (1 - e_n^g))| \leq 2\varepsilon$$

$\forall j \geq j_0$  かつ、全体として、

$$|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| \leq 3\varepsilon \quad \forall j \geq j_0, \quad \forall n \geq n_0(\beta) \vee n_1(\beta).$$

残りの  $|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)|$ ,  $j=1, 2, \dots, j_0-1$ , ( $\forall g \in \tilde{G}$ ) の部分  
は、次のようである。

$$\{T_g(\varphi_j - \varphi_0), T_g\varphi_0, j=1, 2, \dots, j_0-1, g \in \tilde{G}\}$$

は、Theorem 1 の証明からわかるように weakly relatively  
compact である。よって Akemann [1] の定理により、 $\exists \Psi$   
 $\in M_*$ ,  $\Psi \geq 0$  :  $\forall \varepsilon > 0$  に対して、 $\exists \delta > 0$  :

$$\Psi(a^*a + aa^*) < \delta \quad (a \in S) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |T_g(\varphi_j - \varphi_0)(a)| < \varepsilon, \\ |T_g\varphi_0(a)| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

$\forall g \in \tilde{G}, j=1, 2, 3, \dots, j_0-1$

である。今  $a_n \rightarrow 0 (S)$  から  $\exists n_2(\varepsilon) : \forall n \geq n_2(\varepsilon)$  に対して、

$$|(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| < \varepsilon, \quad |\varphi_0(a_n^g)| < \varepsilon$$

$\forall g \in \tilde{G}, j=1, 2, 3, \dots, j_0-1$ 。従って、前半とあわせて、

$$\left. \begin{array}{l} |(\varphi_j - \varphi_0)(a_n^g)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ |\varphi_0(a_n^g)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{array} \right\} \text{uniformly for } g \in \tilde{G}, j=1, 2, \dots.$$

よって  $|\varphi_j(a_n^g)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$  uniformly for  $g \in \tilde{G}, j=1, 2, 3, \dots$ 。

今定理の証明をする。 $\{T_g\varphi, \varphi \in K, g \in \tilde{G}\}$  が weakly  
relatively compact であるときうには、かつたに  $\{e_n\}$   
 $M$  の射影元の直交列に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(e_n^g) = 0 \quad \text{uniformly for } g \in \tilde{G}, \varphi \in K$$

をいえる。もし  $\lambda$  が  $\tau$  なければ、 $\exists \{e_n\} : \exists \varepsilon > 0$   
 $\exists n_k (n_k \uparrow) (k=1, 2, \dots) \exists g_k \in \widehat{G}, \exists \varphi_k \in K (k=1, 2, 3, \dots) :$   
 (\*)  $|\varphi_k(e_{n_k}^{g_k})| \geq \varepsilon, \quad k=1, 2, 3, \dots$

Eberlein-Smulian の Theorem から  $\exists \{\varphi_{k_p}\} \subset \{\varphi_k\} : (k_p \uparrow \infty)$   
 $\varphi_{k_p} \rightarrow \varphi_0$  weakly  $(p \rightarrow \infty)$ ,  $\exists \varphi_0 \in M_*$  である。  $\varphi_{k_p} \rightarrow 0$   
 (CS) から前半により、

$\varphi_{k_p'}(e_{n_{k_p'}}^{g'}) \rightarrow 0 (p' \rightarrow \infty)$  uniformly for  $p', g' \in \widehat{G}$   
 となり (\*) に矛盾する。よって  $\{\varphi \circ g; \varphi \in K, g \in \widehat{G}\}$  は,  
 weakly relatively compact である。

逆は、Theorem 1 及び、Kovács - Szücs の Theorem による。

以上。

$G$ -finite  $\tau$  も  $G$ -finite  $\tau$  なる例が沢山あるし、Corollary  
 3 を一般の場合に拡張することが今後の問題となる。

### 文 献

- [1] E. A. Akemann : The dual space of an operator algebra,  
 Trans. Amer. Math. 126 (1967), 286-302.
- [2] F. P. Greenleaf : Invariant means on topological  
 groups, Van Nostrand, New York (1969).
- [3] I. Kovács - J. Szücs : Ergodic type theorems in  
 von Neumann algebras, Acta Sci. Math., 27 (1966),

233-246.

- [4] S. Sakai:  $C^*$ -algebras and  $W^*$ -algebras, Springer.
- [5] E. Størmer: Large groups of automorphisms of  $C^*$ -algebras, Comm. Math. Phys. 5 (1967), 1-22.
- [6] \_\_\_\_\_: Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras, To appear.
- [7] \_\_\_\_\_: Invariant states of von Neumann algebras, To appear.
- [8] \_\_\_\_\_; Invariant measures and von Neumann algebras, unpublished.
- [9] F. J. Yeadon: A new proof of the existence of a trace in a finite von Neumann algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 257-260.
- [10] T. Hamachi: Construction of the finite center-valued relative dimension function of a  $W^*$ -algebra, and invariant measures, To appear.
- [11] K. Saitō: Automorphism groups of von Neumann algebras and Ergodic type theorems, To appear.