数理解析研究所講究録
168巻 1972年 60-69

1階偏微分方程式の global holomorphic solution について

東京教育大　理　鈴木文夫

§0.　X を $\mathbb{C}^n$ の開集合とし，1階偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u = f$$

の global holomorphic solution の存在の問題を考察する．X が正則領域，或は Runge domain という仮定だけでは，一般に大域解が存在しないことは，若林氏の反例により示された（Proc. Japan Acad. 44 (1968) 820－822）．

ここでは問題を x_1 方向と $(x_2, \cdots, x_n)$ 方向との2つの方向に分けて考察することにより，X が正則領域のときに，大域解の存在のための必要かつ十分な条件を求める．X の正則包を $\tilde{X}$ とすれば，X で大域解が存在するためには，$\tilde{X}$ で大域解が存在することが必要かつ十分であるから，X が正則領域であると仮定することは強い制限ではない．

§1.　定義と主定理．

$\mathbb{C}^n$ の点を $x = (x_1, \cdots, x_n)$ と表わす．X を $\mathbb{C}^n$ の開集合と

する．X の上の holomorphic function の層を $\mathcal{O}_X$（或は簡単に $\mathcal{O}$），開集合 U で定義された holomorphic function の空間を $\mathcal{O}(U)$ と書く．

$P = \partial/\partial x_1$ とし，$Pu = 0$ の local holomorphic solution の層を $\mathcal{O}^P$ とする．方程式 $Pu = f$ は局所的には解を持つから，

(1.1) $$0 \to \mathcal{O}^P \to \mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \to 0$$

は exact である．X が正則領域のときは，$H^p(X, \mathcal{O}) = 0$，$p \geqq 1$，であるから

(1.2) $$\begin{aligned} &P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X) \iff H^1(X, \mathcal{O}^P) = 0, \\ &H^p(X, \mathcal{O}^P) = 0, \quad p \geqq 2. \end{aligned}$$

$x \in X$ に対して，$X \cap \{y \in \mathbb{C}^n \mid y_i = x_i,\ i = 2, \cdots, n\}$ の連結成分で x を含むものを L_x とする．同値関係"$L_x = L_y$"（$x, y \in X$）に関する X の商空間を X/P，写像 $x \mapsto L_x$: $X \to X/P$ を π と書くことにする．X/P には π が submersion となるような複素多様体の構造が存在する．このような構造は一意的に定まる．但し X/P の位相は一般には Hausdorff ではない．さらに $\varphi : X/P \to \mathbb{C}^{n-1}$ を $\varphi(L_x) = (x_2, \cdots, x_n)$ と定義する．φ は local isomorphism で，$\varphi(\pi(x)) = (x_2, \cdots, x_n)$，$x \in X$，である．

<u>主定理</u>　X は正則領域とする．

$P\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}(X)$ となるための必要かつ十分な条件は

a) すべての L_x は単連結である；

b) X/P の位相は Hausdorff である；

c) X/P は正則領域である．

§2. 必要性の証明

先ず，L_x に関する条件として

<u>Prop</u>. 2.1（若林）　X は正則領域，Y は X の閉部分多様体，P は Y に接するとする．

$P\mathcal{O}_X(X)=\mathcal{O}_X(X)$ ならば，$P\mathcal{O}_Y(Y)=\mathcal{O}_Y(Y)$ である．

<u>Coro</u>.　X は正則領域とする．$P\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}(X)$ ならば，すべての L_x は単連結である．

さて，写像 $\pi: X\to X/P$ と X 上の層 $\mathcal{O}^P$ に関する *Leray spectral sequence* は

(2.1)　$E_2^{pq}=H^p(X/P,\mathcal{H}^q_\pi(\mathcal{O}^P))\Rightarrow H^*(X,\mathcal{O}^P)$.

ここで $p<0$ 或は $q<0$ のとき $E_2^{pq}=0$ であるから，$E_2^{10}\subset H^1$ である．また

$$\mathcal{O}^P=\pi^{-1}\mathcal{O}_{X/P},$$

かつ π のファイバーは連結だから，

(2.2)　$\mathcal{H}^0_\pi(\mathcal{O}^P)=\mathcal{O}_{X/P}$.

従って， $H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) \subset H^1(X, \mathcal{O}^P)$． (1.2) より

<u>Prop.</u> 2.2　X が正則領域のとき，

$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば， $H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = 0$．

次に X/P の位相が Hausdorff であることを証明するために，準備として

<u>Lemma</u> 2.3　Z は 1 次元複素多様体とする．

$H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ ならば，Z の位相は Hausdorff である．

（この Lemma は $\dim Z \geqq 2$ のときは成り立たない．）

<u>証明</u>．　U，V は Z の開集合，$U \cup V = Z$ とする．
$H^1(Z, \mathcal{O}) = 0$ ならば，Mayer-Vietoris の定理により，
$(f, g) \mapsto f - g : \mathcal{O}(U) \oplus \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U \cap V)$ は surjective である．Z の位相が Hausdorff でないと仮定して，上の写像が surjective にならないような U，V を作ろう．

Z の点列 $\{z_j\}$ で異なる 2 点 a，b に収束するものが存在する．t を a を中心とする局所座標，U をその座標近傍とする．$V = Z - \{a\}$ は開集合で，$b \in V$，$U \cap V = U - \{a\}$，$U \cup V = Z$ である．　$h = 1/t$ は $\mathcal{O}(U \cap V)$ に属する．
$f \in \mathcal{O}(U)$，$g \in \mathcal{O}(V)$ が存在して，$U \cap V$ で $f - g = h$ とする．十分大きい j について，$z_j \in U \cap V$ だから，
$f(z_j) \to f(a)$，$g(z_j) \to g(b)$．従って，$h(z_j) = f(z_j) - g(z_j) \longrightarrow f(a) - g(b)$．ところが $h(z_j) \to \infty$ であるから，矛盾．

<u>Prop</u>. 2.4. X は正則領域とする.
$P\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}(X)$ ならば, X/P の位相は Hausdorff である.

<u>証明</u>. X/P の異なる2点 a, b は開近傍 U, V により分離されることを示す. $\varphi : X/P \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ は local isomorphism であるから, $\varphi(a)=\varphi(b)$ のときだけを考えればよい. φ の U, V への制限が $\mathbb{C}^{n-1}$ の開球 B の上への isomorphism になるようにできる. $U\cap V$ に属する点 c が存在したと仮定しよう. $\varphi(c)$ と $\varphi(a)=\varphi(b)$ を結ぶ $\mathbb{C}^{n-1}$ の中の複素直線を T とする. $Z=\varphi^{-1}(T)$, $Y=\pi^{-1}(Z)$ とすれば, Y は X の閉部分多様体で, P は Y に接する. 従って, Prop. 2.1 により, $P\mathcal{O}_Y(Y)=\mathcal{O}_Y(Y)$ である. Y は正則領域, $Y/P=Z$ であるから, Prop. 2.2 により, $H^1(Z, \mathcal{O}_Z)=0$. $\dim Z=1$ であるから, Lemma 2.3 により, Z の位相は Hausdorff である. 従って, $U\cap Z$ と $V\cap Z$ は共通点を持たない. 矛盾.

S を P に transversal な, X の $n-1$ 次元部分多様体とする. $U=\pi(S)$ は X/P の開集合で, $\pi^{-1}(U)=\bigcup_{x\in S} L_x$ である. L_x がすべて単連結のとき, $f\in\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ を S から出発して L_x に沿って積分して得られる函数を u とすれば, $u\in\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ かつ $Pu=f$ である. 従って, X/P の十分小さい開集合 U については, $\pi(S)=U$ となる S が存在

するから，

$$(2.3)\qquad P\mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) = \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)).$$

<u>Lemma</u> 2.5　Xは Stein manifold, Zは complex manifold (Hausdorff)，$\pi : X \to Z$ は analytic map とする．Zの開集合Uが Stein ならば，$\pi^{-1}(U)$ も Stein である．

(Hörmander : An introduction to complex analysis in several variables, Th. 2.5.14).

この Lemma と Prop 2.4，(1.2)，(2.3) より，十分小さい Stein 開集合 $U \subset X/P$ について，

$$H^q(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}^P) = 0, \quad q \geq 1.$$

従って，inductive limit を取れば，

$$\mathcal{H}^q_\pi(\mathcal{O}^P) = 0, \qquad q \geq 1.$$

Leray spectral sequence (2.1) と (2.2) より，

$$H^p(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = H^p(X, \mathcal{O}^P), \quad \forall p \geq 0.$$

以上をまとめて，

<u>Theorem</u> 2.6　Xは正則領域とする．$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば，

a)　すべての L_x は単連結である；

b)　X/P の位相は Hausdorff である；

c)　X/P は正則領域である．

§3. 十分性の証明.

Theorem 3.1. X は $\mathbb{C}^n$ の開集合とする.

a) すべての L_x は単連結,

c') $H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = 0$

ならば, $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ である.

証明. 仮定 a) より, X/P の十分小さい開集合 U に対して,

(2.3) $$P\mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) = \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$$

であるから, (1.1) の direct image

$$0 \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}^P \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{\pi_* P} \pi_* \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

は exact である. 従って, (2.2) と c') より, $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$.

Remark. $\dim X = 2$ のときは, X/P の位相が Hausdorff ならば, $H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P}) = 0$. 従って,

a) すべての L_x は単連結,

b) X/P の位相は Hausdorff

ならば, $P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ である.

§4. 主定理の条件をみたさない正則領域の例.

1) 条件 a) をみたさない正則領域.

$$P=\partial/\partial x_1, \quad X=(\mathbb{C}-\{0\})\times\mathbb{C}^{n-1}.$$

若林氏は $\mathbb{C}^3$ の中に *polydisc* と解析的に同型な正則領域で a)をみたさない例を作った.

2) 条件 a) はみたすが b) をみたさない *Runge domain*.

$$P=\frac{\partial}{\partial x_1}+ix_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X=\{\operatorname{Im} x_2>0\}.$$

P の 1 つの積分 $\frac{1}{2}x_1^2+ix_2$ をとり, 変数変換

$$\begin{cases} y_1=x_1, \\ y_2=\frac{1}{2}x_1^2+ix_2 \end{cases}$$

を行なう. この変換で $X=\{\operatorname{Im} x_2>0\}$ に対応する領域は $Y=\{\operatorname{Im} i(\frac{1}{2}y_1^2-y_2)>0\}$, P に対応する微分作用素は $\partial/\partial y_1$ である. y_2 を一定にして, Y の切口を調べると, $\operatorname{Re} y_2<0$ のとき, 連結成分は 1 つ, $\operatorname{Re} y_2\geqq 0$ のとき, 連結成分は 2 つである. 従って, X/P の位相は Hausdorff ではない. 若林氏も大域解の存在しない *Runge domain* の例を示した.

3) 条件 a), b) はみたすが, c) をみたさない *Runge domain*.

$$P=\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}-2i(x_1+ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X=\{\operatorname{Im} x_3>0\}.$$

P の 2 つの独立な積分 $-i(x_1+ix_2)$, $2ix_1(x_1+ix_2)+x_3$ をとり, 変数変換

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -i(x_1 + ix_2) \\ y_3 = 2ix_1(x_1 + ix_2) + x_3 \end{cases}$$

を行なう．この変換で $X = \{\operatorname{Im} x_3 > 0\}$ に対応する領域は $Y = \{\operatorname{Im}(2y_1y_2 + y_3) > 0\}$，$P$ に対応する微分作用素は $\partial/\partial y_1$ である．y_2, y_3 を一定にして，Y の切口を調べると，

$y_2 \neq 0$ のとき，　半平面，

$y_2 = 0$, $\operatorname{Im} y_3 > 0$ のとき，全平面，

$y_2 = 0$, $\operatorname{Im} y_3 \leqq 0$ のとき，空集合，

Y の切口の連結成分が1つであるから，$Y/(\partial/\partial y_1) \subset \mathbb{C}^2$.

$$Y/(\partial/\partial y_1) = \mathbb{C}^2 - \{(y_2, y_3);\ y_2 = 0,\ \operatorname{Im} y_3 \leqq 0\}.$$

Hartogs の連続性定理により，$Y/(\partial/\partial y_1)$ で holomorphic な函数は $\mathbb{C}^2$ 全体に拡張できるから，$X/P \cong Y/(\partial/\partial y_1)$ は正則領域ではない．

§5. 0階の項の影響．

斉次1階微分作用素 P について，$P\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ ならば，任意の $a \in \mathcal{O}(X)$ に対して，$(P + a)\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$ である．逆は一般には成り立たない．例へば，$X = \mathbb{C} - \{0\}$，$P = d/dx$，$a(x) = c/x$，c は定数，$c \notin \mathbb{Z}$．方程式 $(P + a)u = f$ において，u, f のローラン展開を $u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k x^k$,

$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k x^k$ とすれば,

$$(P+a)u = \sum_k (k+c)\, u_k x^{k-1} = \sum_k f_k x^k.$$

従って, $u_k = \frac{1}{k+1} f_{k-1}$ とおけば, $f \in \mathcal{O}(X)$ のとき $u \in \mathcal{O}(X)$ で $(P+a)u = f$ となる.