数理解析研究所講究録
169巻 1972年 134-144

調和関数とベクトル束

電通大　　林　一道

§1. 序.

リーマン面上の調和関数族の性質を落着いて眺めると，正の調和関数の差として表わされる関数族が完備ベクトル束(complete vector lattice)をなすという立場から比較的容易に説明されるものが少くない。本講では，それらの事実をいくつか指摘するとともに，一つの応用例として，ベクトル束の表現定理を使った「リーマン面の境界」の理論を紹介する．

調和関数族を直接扱うには，線形空間では不十分のようであるし，かといって多元環にするような適当な乗法も考え難いということで，ベクトル束として見るのが非常に適切なように思われ，逆にこの立場からの今後の関数解析的な調和関数論の再検討も十分期待されるものがある．

§2. ベクトル束.

<u>定義</u>. 順序≧が与えられた，実数体$\mathbb{R}$上の線形空間Eが

つぎの条件を満たすときベクトル束（*vector lattice* 又は *Riesz space*）という：

1） $x \geqq y \ (x, y \in E) \Rightarrow x+z \geqq y+z \quad (^\forall z \in E)$,

2） $x \geqq 0,\ \lambda > 0 \ (x \in E, \lambda \in \mathbb{R}) \Rightarrow \lambda x \geqq 0$,

3） $^\forall x, ^\forall y \in E$ に対し，$x \cup y = \sup(x, y)$, $x \cap y = \inf(x, y)$ が存在する．（［2］，［7］参照）

<u>記号</u>：$x^+ = x \cup 0$, $x^- = (-x)^+$, $|x| = x \cup (-x)$.

以下Eはすべてベクトル束とする．

<u>定義</u>．E：完備 $\Longleftrightarrow$ 上に有界な任意の部分集合に上限（*sup*）がある．

<u>定義</u>．$u \ (\in E)$：単位元 $\Longleftrightarrow$ $^\forall x, ^\exists \lambda > 0,\ -\lambda u \leqq x \leqq \lambda u$.

<u>定義</u>．E：*Archimedes* 的 $\Longleftrightarrow$ $^\forall x \geqq 0,\ \inf\limits_n \frac{1}{n} x = 0$.

<u>定義</u>．$N \ (\subset E)$ イデアル $\Longleftrightarrow$ N：Eの部分空間で，$|x| \geqq |y|$, $x \in N$, $y \in E$ ならば $y \in N$.

<u>定義</u>．$x \perp y$（x と y が *disjoint*）$\Longleftrightarrow$ $|x| \cap |y| = 0$.

<u>記号</u>：$E^+ = \{x \mid x \geqq 0,\ x \in E\}$.

<u>定理 2.1.</u>（分解定理）$0 \leqq x \leqq y_1 + y_2 \ (y_1, y_2 \in E^+)$ $\Rightarrow$ $^\exists x_1, ^\exists x_2 \in E^+$, $x = x_1 + x_2$, $x_i \leqq y_i \ (i = 1, 2)$.

<u>定理 2.2.</u> E：完備，$A \subset E \Rightarrow E = A^\perp \oplus A^{\perp\perp}$（直交分解）．（ここに，$A^\perp = \{x \mid x \perp y,\ ^\forall y \in A\}$）

Eが単位元をもつとき，NをEの極大イデアル，$x^*(N)$ を

$E \to E/N (\cong \mathbb{R})$ による x の像とすると，$\mathcal{F}(\mathfrak{M}) = \{x^* \mid x \in E\}$ はEの極大イデアル空間$\mathfrak{M}$上の有界関数の集合となる．また，$\mathfrak{M}$はすべてのx^*を連続にする最弱位相を与えてコンパクト位相空間とする．

定理2.3.（表現定理）（[11]） Eが単位元をもち，Archimedes的なとき，i) $\pi : x \to x^*$はEから$\mathcal{F}(\mathfrak{M})$上へのベクトル束としての同形写像である．ii) $\pi(u) = 1$．iii) $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$は$\mathfrak{M}$の点を分離する．iv) $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$は$C(\mathfrak{M})$（$\mathfrak{M}$上の連続関数全体の空間）中でdenseである．更にEがノルム $\|\!|x|\!\| = \inf \lambda \ (-\lambda u \leqq x \leqq \lambda u)$ に関して完備ならば，πはisometryで$\mathcal{F}(\mathfrak{M}) = C(\mathfrak{M})$である．

§3. 調和関数．

SをGreen関数の存在する（即ち$\notin O_G$）開リーマン面とするとき，S上の一価実数値調和関数のつぎのような部分族を考える：

$HP(S) = \{$非負調和関数全体$\}$

$HP'(S) = \{ f_1 - f_2 \mid f_1, f_2 \in HP(S)\}$

$HB(S) = \{$有界調和関数全体$\}$

$HD(S) = \{$Dirichlet積分有限な調和関数全体$\}$

（一つの面だけで考えるときには，(S)を省略することがある．）

HP', HB, HD は自然な順序，加法，スカラー倍の演算に

より順序線形空間となるが，更に 1) HP' は完備ベクトル束，2) HB は単位元をもつ完備ベクトル束（$u=1$ とする），3) HD は（完備とは限らぬ）ベクトル束 であり，しかも何れも Archimedes 的となる．

定義． $f\in HP$ について，

1) f: quasi-bounded $\Longleftrightarrow$ $f=\sup g$ $(g\leqq f,\ g\in HB)$,

2) f: singular $\Longleftrightarrow$ $0\leqq g\leqq f$, $g\in HB$ なら $g=0$,

3) f: minimal $\Longleftrightarrow$ $g\leqq f$, $g\in HP$ なら $g=\lambda\cdot f$ $(\lambda\in\mathbb{R})$,

4) f: generalized harmonic measure $\Longleftrightarrow$ $f\wedge(u-f)=0$.

定理 3.1. $HQB=\{f_1-f_2 \mid f_1, f_2$: quasi-bounded$\}$, $HS=\{f_1-f_2 \mid f_1, f_2$: singular$\}$ とすると，

$$HP'=HQB\oplus HS \quad (\text{直交分解}).$$

また，$HD\subset HQB$ なることが知られている．

この§についての詳細は，[1]，[3]，[9]，[10] を参照されたい．

§4． HB(S) の maximal ideal space.

§§2.-3. に挙げた事柄と，一様収束調和関数列の極限はまた調和関数であることに注意すれば，

定理 4.1. S^* を $HB(S)$ の maximal ideal space とするとき，ベクトル束としての同形写像

$$\pi : HB(S) \to C(S^*)$$

が存在する．しかもπは *isometry* である．

なお，$f, g \in HB(S)$ に対しては，$f \cup g$ および $f \cap g$ はそれぞれ f, g の least harmonic majorant および greatest harmonic minorant であるが，$f^*, g^* \in C(S^*)$ については $f^* \cup g^* = \max(f^*, g^*)$，$f^* \cap g^* = \min(f^*, g^*)$ である．したがって，例えば f が generalized harmonic measure ならば，$\pi \cdot f$ は S^* 上で 0 又は 1 の値しかとらない連続関数となる．

更に，$C(S^*)$ が完備ベクトル束となることから（[4]），

<u>定理 4.2.</u> S^* は stonian space である．

一点 $p \in S$ を固定すると，正線形汎関数

$$\mu_p(f^*) = (\pi^{-1} \cdot f^*)(p) \qquad (f^* \in C(S^*))$$

により，S^* 上の正 Radon 測度 μ_p が定義される．μ_p－零集合，μ_p－可積性などは p に関係しないので，特に必要ない限り μ_p を単に μ とかくことにする．

<u>定義</u>． μ を S^* 上の調和測度という．

<u>定義</u>． S^* をリーマン面 S の境界とよぶ．

以下 S^* が S の境界とよばれるに相応しい性質をもつことを示す．なお，Feller [5] が確率論的な立場から全く同様な境界の概念を導入していたことを附記する．

§5. 開部分集合 G の境界 G^*.

G を S の相対コンパクトでなく，補集合が polar set でない（必ずしも連結とは限らぬ）開部分集合とする． G の相対境界（$=S$ 中の境界）∂G は十分 regular なものと仮定して殆ど一般性を失わない．

$H_0B(G)=\{\partial G$ の正則点で連続的に 0 となる G 上の有界調和関数全体$\}$， $\omega_G=\sup f \quad (f\in H_0B(G),\ f\leqq 1)$ とすると， $H_0B(G)$ は ω_G を単位元とする完備ベクトル束となり，G^* を $H_0B(G)$ の maximal ideal space とすると，再び表現定理を適用して同形写像

$$\pi_G : H_0B(G) \longrightarrow C(G^*)$$

が得られる．

<u>定義</u>. G^* を G の境界とよぶ

<u>定義</u>. $\omega_G=0$ のとき，G は parabolic， $\omega_G\neq 0$ のとき，G は hyperbolic であるという．

G: parabolic $\Longleftrightarrow G^*=\emptyset$ は明らかである．

$f\geqq 0$, $f\in HB(S)$ のとき，$T_G\cdot f=\sup g \ (g\in H_0B(G),\ g\leqq f \ (\text{in } G))$，一般の $f\in HB(S)$ に対しては $T_G\cdot f=T_G\cdot f^+ - T_G\cdot f^-$ で

$$T_G : HB(S) \longrightarrow H_0B(G)$$

を定義する． また，$f\geqq 0$, $f\in H_0B(G)$ のとき，$\hat{f}=f \ (\text{in } G)$ $\hat{f}=0 \ (\text{in } S-\overline{G})$ として， $R_G\cdot f=[\hat{f}$ の least harmonic majorant$]$

, 一般の $f \in H_0B(G)$ に対しては $R_G \cdot f = R_G \cdot f^+ - R_G \cdot f^-$ で

$$R_G : H_0B(G) \to HB(S)$$

を定義する．

<u>定理5.1.</u> T_G は上への準同形写像, R_G は中への同形写像で, 1) $T_G R_G T_G = T_G$, 2) $T_G R_G =$ 恒等写像, 3) $\omega_G = T_G \cdot u$ となる．

<u>定理5.2.</u> $HB(S) = (I - R_G T_G)(HB(S)) \oplus R_G(H_0B(G))$.

(I : $HB(S)$ の恒等写像) これは直交分解でもあり, 右辺の第一項は $\ker T_G$ に等しい．

この定理に基づき, $H_0B(G)$ の maximal ideal と $HB(S)$ の $\ker T_G$ を含む maximal ideal とを1対1に対応させて, G^* を S^* の部分集合と見なすことができる．

<u>定理5.3.</u> G^* は S^* の開かつ閉部分集合である．

G^* はまた, $\pi(R_G \cdot \omega_G)$ が値1をとる S^* の部分集合として特徴づけられる．

以下に, G^* の性質を列挙する．

1) $G_1 \supset G_2 \Rightarrow G_1^* \supset G_2^*$.

2) $(G_1 \cdot G_2)^* = G_1^* \cdot G_2^*$ (とくに $G_1 \cdot G_2 = \emptyset \Rightarrow G_1^* \cdot G_2^* = \emptyset$).

3) $(G_1 + G_2)^* \supset G_1^* + G_2^*$ ($G_1 \cdot G_2 = \emptyset$ のときは等号).

4) i) $G_i \cdot G_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ 又は ii) $G_i \subset G_{i+1}$

$$\Rightarrow (\sum G_i)^* = \overline{\sum G_i^*}.$$

§6. $S+S^*$ の位相.

S と S^* の和集合 $S+S^*$ につぎのように位相を与える.

$p\in S+S^*$ の基本近傍系として,

i) $p\in S$ のときは, p の S 中での基本近傍系,

ii) $p\in S^*$ のときは, $\{G+G^* \mid G: p\in G^*$ なる S の開集合$\}$

を採用する.

<u>定理6.1.</u> $S+S^*$ は連結ハウスドルフ空間となり, S は $S+S^*$ 中の稠密な開集合, S^* はコンパクト集合である.

注意. $S+S^*$ は一般にはコンパクトでなく, 従って S のコンパクト化 (compactification) にはなっていない. S^* は S の Wiener コンパクト化 ([3], [8], [10] 参照) 中の harmonic boundary とよばれる部分に対応している.

更に, このような位相の導入により, πf は f の境界値関数として把握されることを主張するつぎの定理が成立つ:

<u>定理6.2.</u> $f\in HB(S)$ は $S+S^*$ 上の連続関数 $\tilde{f}$ に拡張され, $\tilde{f}(p)=(\pi f)(p)$ $(p\in S^*)$ となる.

§7. 境界の性質.

HB より廣い範囲の関数が $S+S^*$ まで連続に拡張され, その境界値について, つぎのことがわかる.

1) $f\in HQB(S)$ と $f^*\in L^1_\mu(S^*)$ が同形に対応し, f^* は f の

境界値関数となる.

2) $f \in HS(S)$ ならば, $\lim_{\substack{p \to p^* \\ p \in S}} f(p) = 0 \quad (p^* \in S^*)$.

3) f を S 上の連続な非負優調和関数($\pm\infty$ の値も許す)とすると, $\lim_{\substack{p \to p^* \\ p \in S}} f(p)$ はすべての $p^* \in S^*$ で存在し, その境界値は f の greatest harmonic minorant の quasi-bounded part のそれと一致する.

<u>定理 7.1.</u> (最大値の原理) $f \in HB(S)$, $M = \sup_{p \in S} f(p)$ とすると, $\tilde{f}(p^*) = M$ となる $p^* \in S^*$ が存在する.

<u>定理 7.2.</u> S 上の generalized harmonic measure と S^* 中の開かつ閉集合が一対一に対応する. とくに minimal な HB の関数には S^* 中の μ-測度 > 0 な孤立点が対応する.

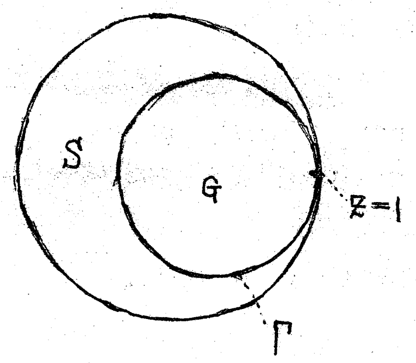
注意. §3 にのべたように $HD \subset HQB$ であるから, HD の関数もこの境界を使ってある程度調べられる.

S 上の bounded analytic function は当然われわれの境界上で取扱えるわけだが, もう少し廣い範囲の analytic function, あるいはその一般化であるリーマン面からリーマン面へのある種の解析写像の境界挙動をも調べることができる. しかし, これらは純関数論的興味の問題となるので, これ以上は立入らない. ([3], [6] 等参照)

§8. $S = \{z \mid |z| < 1\}$ の場合.

Sが複素平面の単位円板のとき，S^*はどのようなものであろうか．単位円周$\{z \mid |z|=1\}$というような単純なものでないことは確かである．（定理4.2.よりS^*はstonian spaceの筈．）ただし，$HB(S)$のかわりに，$HB(\bar{S})=\{|z|\leq 1$で連続，$|z|<1$で調和な関数全体$\}$をとれば，maximal ideal spaceは丁度単位円周と一致する．

ただ，$f(z)=z$がS上の有界正則関数であることを利用して，S^*の各点は単位円周上の点の上にfibreのようになってのっているものと考えることができる．



左図において，Γは$z=1$で単位円周に接する円，Gはその内部とする．GはSの開部分集合とみたときparabolicとなるので，$G^*=\emptyset$．従ってGはS^*の$z=1$の上にのっている点の近傍にはなれない．S^*の点における極限値は，（Fatouの定理に現れるような）radial limitではなく，ある種のtangential limitであることが知られる．

文　献

[1] Ahlfors, L.V., and L. Sario, Riemann surfaces. Princeton, 1960.

[2] Bourbaki, N., Intégration; Chap. I-IV. Hermann, 1952 (2nd ed. 1965). (Act. Sci. Ind. 1175).

[3] Constantinescu, C., and A. Cornea, Ideale Ränder Riemannscher Flächen. Springer, 1963. (Ergeb. Math. vol. 32).

[4] Dixmier, J., Sur certains espaces considérés par M. H. Stone. Sum. Bras. Math. 2 (1951), 151-182.

[5] Feller, W., Boundaries induced by non-negative matrices. Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 19-54.

[6] Hayashi, K., Une frontière des surfaces de Riemann ouvertes et application conformes. Kōdai Math. Sem. Rep. 14 (1962), 169-188.

[7] Luxemburg, W. A. J., and A. C. Zaanen, Riesz Spaces, volume I. North-Holland, 1971.

[8] Mori, S., On a compactification of an open Riemann surface and its application. J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961), 21-42.

[9] Parreau, M., Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann. Ann. Inst. Fourier 3 (1951), 103-197.

[10] Sario, L., and M. Nakai, Classification theory of Riemann Surfaces. Springer, 1970. (Grund. math. Wiss. vol. 164).

[11] Yosida, K., On vector lattice with a unit. Proc. Japan Acad. 17 (1941), 121-124.