数理解析研究所講究録
169巻 1972年 113-123

Nonarchimedean function algebra について

東京電機大　鶴見和之

§1、序

Nonarchimedean analysis については，Monna [4] 及び，Narici, Beckenstein and Bachman [6] の本において基本的な事柄が述べられており，その中で nonarchimedean function algebra についてもいくつか述べられております。然しここでは Van der Put [7] に従って nonarchimedean function algebra の中で特に n.a. valued field F における polynomially convex set についての事柄を紹介することにします。

記号

F : nontrivial nonarchimedean (n.a.) valued field

normed space 又は normed algebra は凡て n.a. とする。

algebra A over F に対して

$\mathfrak{M}(A) := \{ \varphi \mid \varphi : A \longrightarrow F : \text{homomorphism} \}$

この $\mathfrak{M}(A)$ は Gelfand ideals の全体と一致する.

$\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ に対して, $f(\varphi) := \hat{f}(\varphi) := \varphi(f)$, $f \in A$, と書く.

§2. n.a. function algebra.

以下において F は complete とする.

<u>定義 1.</u> A が <u>(n.a.) function algebra</u> over F であるとは.

$\Longleftrightarrow$ (1) A : commutative algebra over F, $\ni 1$.

(2) norm $\|f\| := \sup\{|f(\varphi)| \mid \varphi \in \mathfrak{M}(A)\}$, $f \in A$, に関して Banach algebra.

Banach algebra A に対して, $\mathfrak{M}(A)$ は weak topology を持つとする.

<u>定義 2.</u> 空でない有界集合 $V \subset F^n$ に対して, 多項式環 $F[X_1, \cdots, X_n]$ 上の seminorm $\|f\|_V$ を次の様に定義する.

$\|f\|_V := \sup\{|f(x)| \mid x \in V\}$, $f \in F[X_1, \cdots, X_n]$

$P(V)$: $F[X_1, \cdots, X_n]$ の completion

有界集合 $V \subset F^n$ が <u>polynomially convex</u> であるとは,

$\Longleftrightarrow$ $\forall y \notin V$ に対して, $\exists f \in F[X_1, \cdots, X_n]$ s.t. $|f(y)| > \|f\|_V$.

有界集合 $V \subset F^n$ が <u>m-convex</u> であるとは

$\Longleftrightarrow$ $\forall y \notin V$ に対して, $\exists f \in F[X_1, \cdots, X_n]$, $\deg f \leq m$, s.t. $|f(y)| > \|f\|_V$.

有界集合 $V \subset F^n$ に対して

$\mathrm{hull}_m(V) := \{x \in F^n \mid |f(x)| \leq \|f\|_V \text{ for } {}^\forall f \in F[X_1, \cdots, X_n],\ \deg f \leq m\}$

$\mathrm{hull}(V) := \{x \in F^n \mid |f(x)| \leq \|f\|_V \text{ for } {}^\forall f \in F[X_1, \cdots, X_n]\}$.

明らかに $\mathrm{hull}(V) \subset \mathrm{hull}_m(V)$, $\mathrm{hull}(V) = \mathfrak{M}(P(V))$.

有限生成なる function algebra に対しては通常の有限生成 Banach algebra の場合と同様に次の事が成り立つ.

<u>定理1.</u> A: $f_1, \cdots, f_n$ により生成された function algebra

$V := \{(f_1(\varphi), \cdots, f_n(\varphi)) \in F^n \mid \varphi \in \mathfrak{M}(A)\}$

$\Rightarrow$ (1) V: polynomially convex.

(2) $A \cong P(V)$.

(3) V は $\mathfrak{M}(A)$ に homeomorphic.

<u>証明</u> (1) $y \in \mathrm{hull}(V)$ とし, $\psi: F[f_1, \cdots, f_n] \longrightarrow F$ を $\psi(p(f_1, \cdots, f_n)) := p(y)$, p は多項式, と定義する.
ψ は連続で A に拡大出来, V の定義より $y \in V$ を得る. よって V は polynomially convex.

(2). $I := \{p \in F[X_1, \cdots, X_n] \mid \|p\|_V = 0\}$ とおくと

$F[f_1, \cdots, f_n] \cong F[X_1, \cdots, X_n]/I$. よって

$$A \cong (F[f_1, \cdots, f_n])^- \cong (F[X_1, \cdots, X_n]/I)^-$$
$$= (F[X_1, \cdots, X_n])^- \cong P(V).$$

(3). (2)より $\mathfrak{M}(A)$ は $\mathfrak{M}(P(V))$ に homeomorphic, (1)より $\mathrm{hull}(V) = V$. 故に

$$\mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}(P(V)) = \mathrm{hull}(V) = V.$$

§3. F における polynomially convex set.

ultrametric space X において次の事が成り立つ.

(i) $d(a,b) < d(b,c) \Rightarrow d(a,c) = d(b,c)$.

(ii) $B(a,r) := \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}$ とするとき,

$b \in B(a,r) \Rightarrow B(a,r) = B(b,r)$.

(iii) $a, b \in X$, $0 < s \leq r$ ならば, $B(a,r) \cap B(b,s) = \phi$

又は $B(b,s) \subset B(a,r)$.

(iv) $B(a,r)$ は clopen set.

(v) $\{x \in X \mid d(a,x) = r\}$ は clopen set.

以上の事を準備し次の関係を定義する:

$V \subset F$, $x, y \in V$ に対し次の $\sim$ を定義する.

$x \sim y \iff B(x, |x-y|) \subset V$

明らかに $\sim$ は同値関係である.

$j_V : V \longrightarrow V/\sim$ とする (又は単に j と書く).

$V/\sim$ に quotient topology を入れる.

次の事柄が成り立つ;

(1) $\forall b \in V/\sim$ に対し, $j^{-1}(b)$ は1点又は ball である.

∵) $j^{-1}(b)$ が1点でないとすると, $\exists x, y \in j^{-1}(b)$.故に,

$B(x, |x-y|) \subset V$. よって $B(x,|x-y|)$ 内の任意の点が $j^{-1}(b)$ に入る事を示せばよい. $\forall z \in B(x, |x-y|)$ に対して,

$u \in B(x, |x-z|) \Rightarrow |u-x| \leq |x-z| \leq |x-y|$ ∴ $u \in B(x,|x-y|) \subset V$

$\therefore B(x, |x-z|) \subset V$ 即ち $x \sim z$ $\therefore z \in j^{-1}(b)$.

(2) $\alpha, \beta \in V$, $j(\alpha) \neq j(\beta)$ に対し, $d(\alpha, \beta) = d(j(\alpha), j(\beta))$.

$\because$) $d(j(\alpha), j(\beta)) := \inf\{\, |x-y| \mid j(\alpha)=j(x),\ j(\beta)=j(y) \,\}$

$x \not\sim y$, $x \sim x' \Rightarrow |x-y| > |x-x'|$ だから, $x \sim x'$, $y \sim y'$

$x \not\sim y$ に対して, $|x-y| = |(x-x')+(x'-y')+(y'-y)|$

$= \max(|x-x'|, |x'-y'|, |y'-y|) = |x'-y'|$ 故に

$j(\alpha) \neq j(\beta)$ ならば $d(\alpha, \beta) = d(j(\alpha), j(\beta))$.

(3) $j^{-1}(b)$ が ball ならば, b は $V/\sim$ の isolated point である.

(4) V が complete なら, $V/\sim$ もまた complete.

補題1. $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$, $\rho > 0$ とするとき,

n-convex set $V_\rho := \{x \in F \mid |(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)| \leq \rho\}$ は,

$V_\rho = B(a_1, \rho_1) \cup B(a_2, \rho_2) \cup \cdots \cup B(a_n, \rho_n)$ と書ける.

ただし $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n \in \overline{|F^*|}$

証明. $|a_1| \geqq |a_2| \geqq \cdots \geqq |a_n|$, $|a_1| > |a_n|$ としてよい.

$\because$) $|a_1| = |a_2| = \cdots = |a_n|$ なら座標変換すれば上の様にとれ,

又 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ なら補題1は明らかである.

次にこの補題を①,②の場合に分けて示す.

① $\rho \geq |a_1|^n$ の場合: $V := \{x \in F \mid |x| \leq \sqrt[n]{\rho}\}$ とおくと,

$V_\rho = V$ であり, 前記(ii)により $B(a_i, \rho_i) = B(0, \rho_i)$

であるから,この場合は示された, ただし $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_n =$

$= \sup\{\lambda \in |F^*| \mid \lambda \leq \sqrt[n]{\rho}\}$.

② $\rho < |a_1|^n$ の場合： $|a_1| \geqq |a_2| \geqq \cdots \geqq |a_n|$ の中で

$|a_1| = |a_i|$ となる最後の番号 i を i_0 とする。 今，

$W_1 := V_\rho \cap \{x \in F \mid |x| = |a_1|\}$, $W_2 := V_\rho \cap \{x \in F \mid |x| < |a_1|\}$.

とおくと，次の事が成り立つ

$$W_1 = \{x \in F \mid |(x-a_1)\cdots(x-a_{i_0})||a_1|^{n-i_0} \leq \rho\}$$

$$W_2 = \{x \in F \mid |(x-a_{i_0+1})\cdots(x-a_n)||a_1|^{i_0} \leq \rho\}$$

更に $V_\rho = W_1 \cup W_2$ である．よって W_1, W_2 について同様の操作をくり返し補題1を得る．

<u>補題2.</u> $a_1, a_2, \cdots a_{n+1}$: F の $n+1$ 個の異る点．

$\Rightarrow$ $\mathrm{hull}_n(\{a_1, \cdots, a_{n+1}\}) = B(a_{i_1}, \rho_1) \cup \cdots \cup B(a_{i_m}, \rho_m)$.

ここで，適当な $i_1, i_2, \cdots, i_m \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$, $\rho_1, \cdots, \rho_m \in \overline{|F^*|}$.

<u>証明.</u> $\mathcal{P}_n$: degree $\leq n$ なる多項式の全体.

$V := \{a_1, \cdots, a_{n+1}\}$ とおく．次の様な多項式を作る：

$p_0 := 1$, $p_1 := (X - a_1)$, $p_2 := (X-a_1)(X-a_{i_2}), \cdots$

$p_n = (X-a_1)(X-a_{i_2})\cdots\cdots(X-a_{i_n})$.

ただし，$\|p_k\|_V = |p_k(a_{i_{k+1}})|$ なる様に a_{i_k} を選ぶ．

$\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ は $\mathcal{P}_n$ の $\|\cdot\|_V$ に関する直交基である．

$\because$) $\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i p_i\|_V = \max\|\alpha_i p_i\|_V$.

従って $\mathrm{hull}_n(V) = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, ただし $V_i := \{x \in F \mid |p_i(x)| \leq \|p_i\|_V\}$.

又補題1により， $V_j = B(a_1, r_{j1}) \cup \cdots \cup B(a_{ij}, r_{ij})$.

故に，

$$\mathrm{hull}_n(V) = \cap V_i = B(a_1, \rho_1) \cup \cdots \cup B(a_{in}, \rho_n).$$

ただし $\rho_1, \cdots, \rho_n \in \overline{|F^*|}$.

<u>補題3.</u> F の任意の n-convex subset は $k\ (\leq n)$ 個の点又は ball の合併である．

<u>証明.</u> V : n-convex subset of F. $\mathrm{card}(V/\sim) > n$ とする．$a, a_1, a_2, \cdots, a_n \in V$ s.t. $\mathrm{card}(\{j(a), j(a_1), \cdots, j(a_n)\}) = n+1$, をとる．補題2により，$\exists \rho > 0$ s.t. $B(a, \rho) \subset \mathrm{hull}_n(\{a, a_1, \cdots a_n\}) \subset V$. よって，$\forall a \in V$ は maximal ball $B(a, \rho_a) \subset V$ の中心である．2つの ball $B(a, \rho)$, $B(a', \rho')$ に対して，前記(iii)により交わらないか又は他方に含まれる故，$B(a, \rho) \cap B(a', \rho') = \phi$ 又は $B(a, \rho) = B(a', \rho')$ である，故に V は disjoint ball の合併になる．その個数が n より大とすると，それらの中で $(n+1)$ 個の disjoint ball の中心 $b_1, \cdots b_{n+1}$ がとれ $\mathrm{hull}_n(\{b_1, \cdots, b_{n+1}\}) \subset V$. そうすると，補題2により，或る $b_i, b_j\ (i \neq j)$ が1つの ball ($\subset V$) に含まれ，その中心となり得る．これは矛盾．よってその個数 $\leq n$.

<u>命題.</u> R : algebra over F, $\ni 1$, 更に2つの seminorm $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ を持ち $\|xy\|_i \leq \|x\|_i \cdot \|y\|_i$ for $\forall x, y \in R$, $\|1\|_i = 1$.
$\|\cdot\| := \max(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)$ とすると，次の2つの事柄は同値である．

(1) $\exists f \in R$, s.t. $\| f - 1 \|_1 < 1$, $\| f \|_2 < 1$.

(2) $(R, \|\cdot\|)^- \cong (R, \|\cdot\|_1)^- \times (R, \|\cdot\|_2)^-$

証明. (1)⇒(2). map $\psi : (R, \|\cdot\|) \to (R, \|\cdot\|_1) \times (R, \|\cdot\|_2)$ を

$\psi(a) := (a, a)$ により定義する.

ψ の image が dense である事を示せばよい, $e := (1, 0)$.

$\forall \varepsilon > 0$ に対して, 奇数 m を次の様にとる, 即ち, $g := ((f-1)^m + 1)^m$,

$\| \psi(g) - e \| < \varepsilon$. そうすると $^\forall(a, b) \in (R, \|\cdot\|_1) \times (R, \|\cdot\|_2)$

に対して, $ag + b(1-g)$ をとると,

$\| \psi(ag + b(1-g)) - (a, b) \| \leqq \varepsilon \max(\|a\|_1, \|b\|_2)$.

(2)⇒(1) [1] p 20. lemma 3.2 と同様に示す事が出来る.

補題 4. $V := B(a_1, \rho_1) \cup \cdots \cup B(a_n, \rho_n) \subset F$.

$B(a_i, \rho_i) \cap B(a_j, \rho_j) = \phi \quad (i \neq j)$

⇒ (1) $\mathfrak{P}(V) = \mathfrak{P}(B(a_1, \rho_1)) \times \cdots \times \mathfrak{P}(B(a_n, \rho_n))$

(2) V : polynomially convex.

証明. (1) 仮定により $\rho_i, \rho_j < |a_i - a_j| \quad (i \neq j)$ である.

$m := \max\{ |a_i - a_j| \mid i, j \in \{1, \cdots, n\} \}$ とし

$m = |a_1 - a_2| = |a_1 - a_3| = \cdots = |a_1 - a_s|$, $|a_1 - a_k| < m$

$(k > s)$ とする.

$p(X) := (X - a_2)(X - a_3) \cdots (X - a_s)(a_1 - a_2)^{-1} \cdots (a_1 - a_s)^{-1}$

とおくと $\| p - 1 \|_X < 1$, $\| p \|_Y < 1$.

但し $Y := B(a_2, \rho_2) \cup \cdots \cup B(a_s, \rho_s)$, $X := V \setminus Y$.

よって前命題により(1)が導かれる.

(2) $e_i \in \mathcal{P}(V)$ s.t. $e_i(x) = 1, x \in B(a_i, \rho_i)$, $e_i(x) = 0\ x \notin B(a_i, \rho_i)$,

とし $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{P}(V))$ とすると, $\exists j$ s.t. $\varphi(e_j) = 1$. $\therefore \varphi \in B(a_j, \rho_j)$

故に $\quad \mathrm{hull}(V) = \mathcal{M}(\mathcal{P}(V)) = \bigcup_{i=1}^{m} B(a_i, \rho_i) = V$

<u>定理2</u> V : F の有界部分集合.

V : polynomially convex $\Longleftrightarrow$ $V/\sim$: compact.

<u>証明</u> (1) $V/\sim$: compact とすると, V は closed in F.

任意の正の整数 m に対して, $\exists a_1, \cdots, a_s \in V/\sim$, s.t.

$V/\sim = \bigcup_{i=1}^{s} B(a_i, 1/m)$. $\quad x_i \in V$ s.t. $j(x_i) = a_i$ をとる.

$j^{-1}(B(a_i, 1/m)) = (B(x_i, 1/m) \cap V) \cup j^{-1}(a_i)$ となり,

$V_m := \bigcup_{i=1}^{s} B(x_i, 1/m) \cup j^{-1}(a)$ とおくと, 各 V_m は

補題4により, polynomially convex で $V_m \supset V$. 又

$V = \cap V_m$ であるから, V は polynomially convex.

(2) V : polynomially convex とする.

$\{\mathrm{hull}_n(V)/\sim\}$ は projective system である.

map $\varphi_n : V \hookrightarrow \mathrm{hull}_n(V) \longrightarrow \mathrm{hull}_n(V)/\sim$ がとれ,

continuous map $\varphi : V \longrightarrow \varprojlim \mathrm{hull}_n(V)/\sim$ を得る.

更に次の map ψ を得る.

$$\psi : V/\sim \longrightarrow \varprojlim \mathrm{hull}_n(V)/\sim$$

そして ψ は isometric である.

補題3により $\mathrm{card}(\mathrm{hull}_n(V)/\sim) \leq n$ であるから

$\varprojlim \mathrm{hull}_n(V)/\sim$ は compact である。$V/\sim$ は complete であるから $V/\sim$ は compact である。

系. V, W : polynomially convex.

$\Rightarrow$ (1) $V \cup W$: polynomially convex

(2) $V \cap W = \phi \Rightarrow P(V \cup W) = P(V) \times P(W)$.

(3) X : closed subset of $V/\sim$ $\Rightarrow j^{-1}(X)$: polynomially convex.

文献

[1] G. Bachman : Introduction to p-Adic Numbers and Valuation Theory, Academic Press. (1964).

[2] E. Beckenstein : On regular nonarchimedean Banach algebras, Arch. Math. 19 (1968). 423 — 427.

[3] H. Grauert und R. Remmert : Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis, Inventiones math. 2 (1966).

[4] A. F. Monna : Analyse non-archimedienne, Springer (1970)

[5] L. Narici : On nonarchimedean Banach algebras. Arch. Math. 19 (1968) 428 — 435.

[6] L. Narici, E. Beckenstein and G. Bachman : Functional

analysis and valuation theory, Marcel Dekker (1971).

[7] M. Van der Put : Nonarchimedean function algebras. Indagationes Math. 33 (1971) 60 — 77.

[8] A. C. M. Van Rooji and W. H. Schikhof : Nonarchimedean Analysis, Nieuw Archif voor Wiskunde (2) XIX (1971) 120 – 160.