数理解析研究所講究録
170巻 1973年 155-162

Weighted homogeneous polynomial で定義される Milnor fibering の Seifert matrix について

東大　坂本幸一

§1. Introduction

I. Tamura [4] の定義した spinnable structure は Milnor fibering の構造を一般化したものであるが、M. Kato [2] は S^{2n+1} $(n\geqq 3)$ 上の simple spinnable structure と、unimodular matrix の congruent class が一対一に対応することを示した。この matrix を Seifert matrix という。ここでは、Brieskan type の多項式に関する Milnor fibering の Seifert matrix を求め、weighted homogeneous polynomial の Milnor fibering の Seifert matrix に関する "Join theorem" (c.f. M. Oka [3]) を証明する。証明は M. Oka [3] の結果を本質的に使う。

S^{2n-1} に simple spinnable structure $\mathcal{S}$ が与えられたとき、$F\times[0,1]$ から $\mathcal{S}$ の spinning bundle への bundle map を $g : F\times[0,1] \longrightarrow S^{2n-1}$ とする。但し F は $\mathcal{S}$ の generator で、$g|F\times t$ は spinning bundle の $e^{2\pi i t}\in S^1$ 上の fiber への diffeomorphism になる。F は S^{n-1} の bouquet と同じ homotopy type をもつ。

<u>Definition</u> (Kato [2]) free abelian group $\tilde{H}_{n-1}(F)$ の basis $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ に対し matrix $\Gamma(g) = \left(L(g_{\#}(\alpha_i \times 0),\ g_{\#}(\alpha_j \times \tfrac{1}{2})) \right)$ を g の Seifert matrix という。ここで $L(\xi, \eta) = \xi$ と η の linking number in S^{2n-1} = intersection number $\langle \lambda, \eta \rangle$。($\xi = \partial\lambda$)

homology 群はすべて $\mathbb{Z}$-係数で考える。

<u>Theorem 1</u> Brieskorn type の多項式 $f(z_1, \cdots, z_n) = (z_1)^{a_1} + \cdots + (z_n)^{a_n}$ ($a_i \geqq 2$) の Milnor fibering の Seifert matrix $\Gamma(f)$ は

$$\Gamma(f) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} A_{a_1} \otimes A_{a_2} \otimes \cdots \otimes A_{a_n}$$

と表わされる。ここで $a \geqq 2$ に対し A_a とは

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -1 \quad 1 \end{pmatrix}$$

なる $(a-1) \times (a-1)$ 行列とする。

<u>Theorem 2.</u> 原点に isolated singularity をもつ weighted homogeneous polynomial の Milnor fibering の Seifert matrix に関して Join theorem が成り立つ。すなわち：$g(z)$, $h(w)$ をそれぞれ原点に isolated singularity をもつ $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ 内の weighted homogeneous polynomial とすると $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ の多項式 $f(z, w) = g(z) + h(w)$ の Seifert matrix は

$$\Gamma(f) = (-1)^{mn}\, \Gamma(g) \otimes \Gamma(h)$$

で表わされる。

§2. Proof of Theorem 2

以下、二つのtopological space X, Y の Join $X*Y = X\times I\times Y/\sim$ $((x,0,y)\sim(x',0,y),\ (x,1,y)\sim(x,1,y'))$ には、strong topology を入れる。$g(z), h(w)$ を type $a=(a_1,\cdots,a_m)$, $b=(b_1,\cdots,b_n)$ の weighted homog. polynomial とする。$f(z,w)=g(z)+h(w)$ とおく。$r\geq 0, \theta\in R, z\in\mathbb{C}^m$, $w\in\mathbb{C}^n$ に対し、

$$\begin{cases} r^{\frac{1}{a}}\circ z=(r^{\frac{1}{a_1}}z_1,\cdots,r^{\frac{1}{a_m}}z_m),\ r^{\frac{1}{b}}\circ w=(r^{\frac{1}{b_1}}w_1,\cdots,r^{\frac{1}{b_n}}w_n), \\ (e^{i\theta})^{\frac{1}{a}}\circ z=(e^{\frac{i\theta}{a_1}}z_1,\cdots,e^{\frac{i\theta}{a_m}}z_m),\ (e^{i\theta})^{\frac{1}{b}}\circ w=(e^{\frac{i\theta}{b_1}}w_1,\cdots,e^{\frac{i\theta}{b_n}}w_n) \end{cases}$$

とおく。明らかに、weighted homogeneous の定義より、

$$g(r^{\frac{1}{a}}\circ z)=rg(z),\ h(r^{\frac{1}{b}}\circ w)=rh(w),\ f(r^{\frac{1}{a}}\circ z, r^{\frac{1}{b}}\circ w)=rf(z,w)$$

となる。$e^{i\theta}$ についても同様。$\mathbb{C}^N$ の単位球を S^{2N-1}, $R^+=\{r\in R; r>0\}$ とすると、

$$\varphi: S^{2m+2n-1}\times R^+ \longrightarrow \mathbb{C}^{m+n}-\{0\},\ \varphi(z,w,r)\equiv(r^{\frac{1}{a}}\circ z, r^{\frac{1}{b}}\circ w)$$

は diffeomorphism であり、$f(\varphi(z,w,r))=rf(z,w)$ となる。そこで

$$\tau=p_1\circ\varphi^{-1}: \mathbb{C}^{m+n}-\{0\}\longrightarrow S^{2m+2n}$$ とおくと、

$$\sigma: S^{2m-1}*S^{2n-1}\longrightarrow\mathbb{C}^{m+n}-\{0\}\xrightarrow{\ \tau\ }S^{2m+2n-1}$$

$$\sigma([z,s,w])\equiv\tau(s^{\frac{1}{a}}\circ z,(1-s)^{\frac{1}{b}}\circ w)=\left(\left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{1}{a}}\circ z,\left(\frac{1-s}{r}\right)^{\frac{1}{b}}\circ w\right)$$

は orientation preserving homeo. で

$$r\cdot(f\circ\sigma)([z,s,w])=sg(z)+(1-s)h(w)\equiv(g*h)([z,s,w])$$

となる。(但し、$r=r([z,s,w])$ は $S^{2m-1}*S^{2n-1}$ 上の正値連続函数)

i.e.
$$\begin{tikzcd} S^{2m-1}*S^{2n-1} \arrow[rr, "\sigma", "\approx"'] \arrow[dr, "g*h"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & & S^{2m+2n-1} \arrow[dl, "r\cdot f"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$
$(r>0)$

したがって、

Prop. 1　f によって定義される $S^{2m+2n-1}$ の Milnor fibering と $g*h$ によって定義される $S^{2m-1}*S^{2n-1}$ の Milnor fibering の構造は，σ によって全く同一視できる。

このσによって連続写像

$$j:(\{g>0\}\cap S^{2m-1})*(\{h>0\}\cap S^{2n-1}) \longrightarrow \{f>0\}\cap S^{2m+2n-1}$$

が定義される。但し，$\{g>0\}\equiv\{z\in\mathbb{C}^m;\ g(z)>0\}$ 等。

Prop. 2　この j は homotopy equivalence である。よって natural inclusion $\sigma^{-1}\circ j:(\{g>0\}\cap S^{2m-1})*(\{h>0\}\cap S^{2n-1})\hookrightarrow\{g*h>0\}\cap S^{2m-1}*S^{2n-1}$ は homotopy equivalence である。

(Proof)
$$\{g>0\}\cap S^{2m-1}\xrightarrow{\approx} g^{-1}(1)\qquad z\longmapsto\left(\frac{1}{|g(z)|}\right)^{\frac{1}{a}}\circ z$$
$$\{h>0\}\cap S^{2n-1}\xrightarrow{\approx} h^{-1}(1)\qquad w\longmapsto\left(\frac{1}{|h(w)|}\right)^{\frac{1}{b}}\circ w$$

はいずれも diffeo. で，

$$f^{-1}(1)\xhookrightarrow{\sim}\{f>0\}\quad ,\ \tau:\{f>0\}\xrightarrow{\sim}\{f>0\}\cap S^{2m+2n-1}$$

は，いずれも homotopy equivalence である。一方，Oka[3]により

$$\psi:\ g^{-1}(1)*h^{-1}(1)\xrightarrow{\sim} f^{-1}(1)$$

なる homotopy equivalence が存在する。具体的には，ψは，

$$\psi([\hat{z},s,\tilde{w}])=\left(\alpha^{\frac{1}{a}}\circ\hat{z},\ (1-\alpha)^{\frac{1}{b}}\circ\tilde{w}\right),\quad[\hat{z},s,\tilde{w}]\in g^{-1}(1)*h^{-1}(1)$$

とかける。但し，$\alpha=\alpha(s)$ は s の連続函数で $0\leqq\alpha(s)\leqq1$，かつ十分小さな正数 ε があって，$\alpha(s)=0\ (0\leqq s<\varepsilon)$，$\alpha(s)=s\ (2\varepsilon<s<1-2\varepsilon)$，$\alpha(s)=1\ (1-\varepsilon<s\leqq1)$ である。

よって次の diagram が，homotopy commutative なることをいえばよい。

$$\begin{tikzcd} (\{g>0\}\cap S^{2m-1}) * (\{h>0\}\cap S^{2n-1}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\cong"'] & & \{f>0\} \\ & g^{-1}(1) * h^{-1}(1) \arrow[r, "\psi", "\sim"'] & f^{-1}(1) \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {[z,s,w]} \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto, bend right] & (s^{\frac{1}{a}}\circ z, (1-s)^{\frac{1}{b}}\circ w) \\ & \psi([(\frac{1}{g(z)})^{\frac{1}{a}}\circ z, s, (\frac{1}{h(w)})^{\frac{1}{b}}\circ w]) \end{tikzcd}$$

この2つの mapping の間の homotopy は、次の式で与えられる。

$$([z,s,w],t) \longmapsto \left(\left((1-t)s+\frac{t\alpha}{|g(z)|}\right)^{\frac{1}{a}}\circ z, \left((1-t)(1-s)+\frac{t(1-\alpha)}{|h(w)|}\right)^{\frac{1}{b}}\circ w\right)$$
$$(0\leqq t\leqq 1)$$

q.e.d.

以後 g, h は isolated singularity をもつものとする。Prop 1より、Theorem 2 をいうには、$\Gamma(g*h)=(-1)^{mn}\Gamma(g)\otimes\Gamma(h)$ を証明すればよい。

$F_g=\{g>0\}\cap S^{2m-1}$, $F_h=\{h>0\}\cap S^{2n-1}$, $F_{g*h}=\{g*h>0\}\cap S^{2m-1}*S^{2n-1}$ とおくと、g で定義される S^{2m-1} の spinnable structure は smooth map

$$F_g\times[0,1]\longrightarrow S^{2m-1},\quad (z,t)\longmapsto (e^{it})^{\frac{1}{a}}\circ z$$

で定義される。h, $g*h$ についても同様。

$$k_1 : S^{2m-1}\longrightarrow S^{2m-1},\quad z\longmapsto (e^{i\pi})^{\frac{1}{a}}\circ z$$
$$k_2 : S^{2n-1}\longrightarrow S^{2n-1},\quad w\longmapsto (e^{i\pi})^{\frac{1}{b}}\circ w$$

とおく。$\tilde{H}_{m-1}(F_g)$ の base を $e_1, e_2, \cdots, e_a$, $\tilde{H}_{n-1}(F_h)$ の base を $f_1, \cdots, f_b$ とすると、$\tilde{H}_{m+n-1}(F_g*F_h)$ の base として $(e_i\otimes f_j)_{\substack{i=1,2,\cdots,a\\ j=1,2,\cdots,b}}$ がとれる。($\tilde{H}_{m+n-1}(F_g*F_h)\cong\tilde{H}_{m-1}(F_g)\otimes\tilde{H}_{n-1}(F_h)$)

Seifert matrix の定義より、

$$\Gamma(g) = \left(L(e_i, k_{1*} e_j) \right), \quad \Gamma(h) = \left(L(f_k, k_{2*} f_l) \right)$$

Prop 2 より

$$\Gamma(g * h) = \left(L((e_i \otimes f_k), (k_1 * k_2)_*(e_j \otimes f_l)) \right)$$
$$= \left(L(e_i \otimes f_k, k_{1*} e_j \otimes k_{2*} f_l) \right)$$

したがって 次の Lemma が成立すれば

$$\Gamma(g * h) = (-1)^{mn} \Gamma(g) \otimes \Gamma(h)$$

が成立する。

<u>Lemma</u> $\quad S^m, S^n \subset S^{m+n+1}, \quad S^m \cap S^n = \phi$

$\qquad\qquad S^p, S^q \subset S^{p+q+1}, \quad S^p \cap S^q = \phi$

とする。このとき、

$$L_{S^{m+n+1} * S^{p+q+1}}(S^m * S^p, S^n * S^q)$$
$$= (-1)^{(n+1)(p+1)} L_{S^{m+n+1}}(S^m, S^n) \cdot L_{S^{p+q+1}}(S^p, S^q)$$

(Proof) 次の diagram は符号を除いて commutative である。

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_{m+p+1}(S^m * S^p) \arrow[r, "(incl)_*"] \arrow[dr, "(in)_*"'] & \tilde{H}_{m+p+1}(S^{m+n+1} * S^{p+q+1} - S^n * S^q) \arrow[r, "\cong", "Alex. Dual"'] & \tilde{H}^{n+q+1}(S^n * S^q) \\
 & \tilde{H}_{m+p+1}((S^{m+n+1} - S^n) * (S^{p+q+1} - S^q)) \arrow[u, "(in)_*"] & \\
\tilde{H}_m(S^m) \otimes \tilde{H}_p(S^p) \arrow[uu, "\cong"] \arrow[r, "(in)_*"] & \tilde{H}_m(S^{m+n+1} - S^n) \otimes \tilde{H}_p(S^{p+q+1} - S^q) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\cong", "A.D."'] & \tilde{H}^n(S^n) \otimes \tilde{H}^q(S^q) \arrow[uu, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

したがって Lemma は符号を除いて成立する。 したがって、$S^m * S^n = S^{m+n+1}$, $S^p * S^q = S^{p+q+1}$ のときに Lemma を証明すればよい。各 space の top dimension の simplex について考えれば、容易に $L_{S^M * S^N}(S^M, S^N) = (-1)^{M+1}$ なることがわかる。

$\therefore\ L_{(S^m * S^n)*(S^p * S^q)}(S^m * S^p, S^n * S^q)$

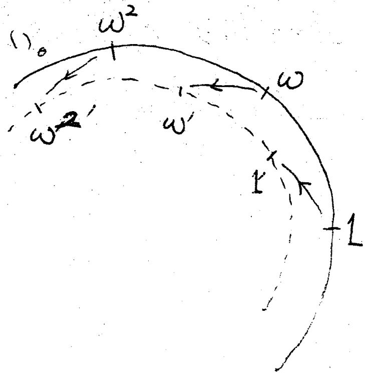
$= (-1)^{(n+1)(p+1)} L_{(S^m*S^p)*(S^n*S^q)}(S^m*S^p, S^n*S^q)$

$= (-1)^{(n+1)(p+1)}(-1)^{m+p+2}$

$= (-1)^{(n+1)(p+1)} L_{S^m*S^n}(S^m,S^n)\cdot L_{S^p*S^q}(S^p,S^q)$ q.e.d.

§3. Proof of Theorem 1.

Theorem 2より，$n=1$のときにいえばよい。$f=z^a$ $(a\geq 2)$.
このMilnor's fiberは $\Omega_a=\{1,\omega,\cdots,\omega^{a-1}\}$ $(\omega=e^{\frac{2\pi i}{a}})$ である。
$\tilde{H}_0(\Omega_a)$のbaseとして$\{\omega-1,\omega^2-\omega,\cdots,\omega^{a-1}-\omega^{a-2}\}$をとる。fiberを角度πだけ動かすことは，$e^{\frac{\pi i}{a}}$をかけることにほかならない。



明らかに，このbaseに関しては，

$$\Gamma(f) = -A_a = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ 1 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 \ \ -1 \end{pmatrix}$$

である。 q.e.d.

(注) Kato[2]によれば，$\overbrace{\text{simple spinnable structure}}^{S^{2n-1}\text{上の}}$ $\mathcal{S}$ のSeifert matrixを$\Gamma=\Gamma(\mathcal{S})$とおくと，spinning bundleのmonodromyは，$(-1)^n\Gamma^t\cdot\Gamma^{-1}$で与えられ，generator Fのintersection matrixは，$-\Gamma+(-1)^n\Gamma^t$で与えられる。Theorem 1の結果をこれに適用してやれば，Brieskorn typeのMilnor fiberingのmonodromy，及び

fiber の signature に関して，周知の結果を得ることができる。(c.f. Brieskorn [1])

References

[1] E. Brieskorn : Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, Inventiones Math. 2 (1966)

[2] M. Kato : A classification of simple spinnable structures on S^{2n+1}

[3] M. Oka : On the homotopy types of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials

[4] I. Tamura : Foliations and spinnable structures on manifolds