

$S^4 \times S^2$ 上の free involution

に つ いて

中央大 理工 松 江 友 文

$S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$ とする。

$\alpha: S^2 \rightarrow S^2$ を $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$

により定義する。

$T: \Sigma^4 \rightarrow \Sigma^4$ を homotopy 4-sphere 上の smooth free involution とし (T, Σ^4) と書くことにする。

$A: S^4 \rightarrow S^4$ を antipodal map とする。

$T \times \alpha: \Sigma^4 \times S^2 \rightarrow \Sigma^4 \times S^2$ を $(T \times \alpha)(x, y) = (Tx, \alpha y)$

により定義する。

$A \times \alpha: S^4 \times S^2 \rightarrow S^4 \times S^2$ を同様に

$(A \times \alpha)(x, y) = (Ax, \alpha y)$ により定義する。

すると次の定理が云える。

定理. 任意の (T, Σ^4) に対し,

$(\Sigma^4 \times S^2) / (T \times \alpha)$ は $(S^4 \times S^2) / (A \times \alpha)$
に diffeomorphic である。

(証明)

$\Sigma^4 \rightarrow \Sigma^4/T$ の mapping cylinder を M^5 とする。

$\partial M^5 = \Sigma^4$, $\exists W^5$: contractible manifold.

∴ $\partial W^5 = \Sigma^4$

$M^5 \cup_{\Sigma^4} W^5 = N^5$ とすると N^5 は $\mathbb{R}P^5$ に homotopy equivalent.

$\mathbb{R}P^5$ と homotopy type の等しい smooth 5-manif.

は、次の Brieskorn involution の orbit space に diffeo.

$$V_{2k+1} = \{ (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4 \mid z_0^{2k+1} + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \}$$

$$S^7 = \{ (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4 \mid z_0 \bar{z}_0 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3 = 1 \}$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ とすると,

$V_{2k+1} \cap S^7$ は S^5 に diffeo. これを S_{2k+1}^5 とおき,

free involution $T_{2k+1} : S_{2k+1}^5 \rightarrow S_{2k+1}^5$ を

$$T_{2k+1}(z_0, z_1, z_2, z_3) = (z_0, -z_1, -z_2, -z_3) \text{ により}$$

定義する。すると homotopy $\mathbb{R}P^5$ は S_{2k+1}^5 / T_{2k+1}
 ($k = 0, 1, 2, 3$)
のど"かかに diffeo であることがわかっている。

上で作った N^5 を S^5 の free involution の orbit space

と考えると、その involution は明らかに desuspend

することがわかるから S^5/T_1 か S^7/T_7 のど"かかに

diffeo.

これらのことから次の2つの場合について定理を証明すべ

ばよい。

(i) $N^5 = S^5/T_1$, この場合は Σ^4/T と S^4/A が

k -cobordant であることより 明らかに定理は云える。

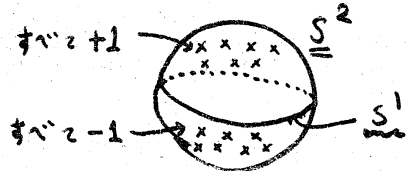
(ii) $N^5 = S^5/T_\eta$, この場合は次のようになる。

$$S^7 \supset \underline{S^2} = S^7 \cap \{I_m z_1 = z_2 = z_3 = 0\}$$

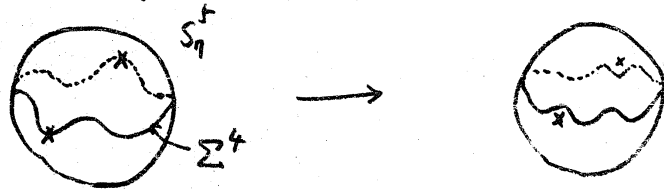
$$\supset \underline{S^1} = S^7 \cap \{z_1 = z_2 = z_3 = 0\}$$

$(S^7 - S^5_\eta) \rightarrow S^1$ なる Milnor fibering の 1 つの fiber と $\underline{S^1}$ との交わりを調べることに より $\underline{S^1}$ と S^5_η は S^7 の中で linking number η で link していることがわかる。

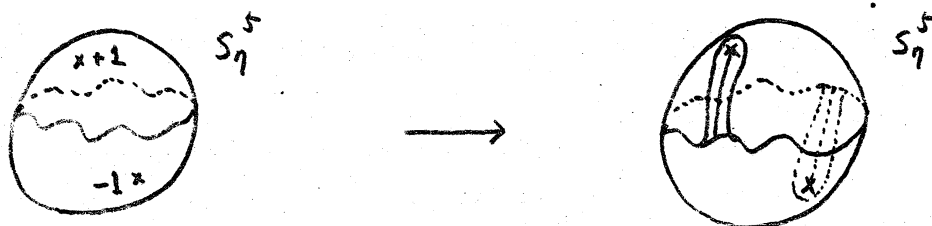
一方 $\underline{S^2} \cap S^5_\eta = \{14 \text{ 個の点} \}$ であり, これらの点は T_η -invariant である。 $\underline{S^2}$ と S^5_η に適宜に向きをつけてその交わりを調べてみると, $\underline{S^1}$ と S^5_η の link の状態は次の図のようになる。



又, $N^5 = S^5_\eta/T_\eta$ としていることより (T_η, S^5_η) の中に invariant (T, Σ^4) があると考えよう。まず最初に, (T, Σ^4) を equivariant に $S^2 \cap S^5_\eta$ からはずしてやる。



次に下図の操作をする。



この操作により S^5 の中に (T, Σ^4) と equivariant diffeo. で, T^5 -invariant な $(T', \Sigma^{4'})$ で且つ, $\underline{S^2}$ と $\Sigma^{4'}$ とは S^5 の中で linking number 1 で link してゐるといふことをみたす $(T', \Sigma^{4'})$ が得られる。
 Σ^2 で, S^5 から, $\underline{S^2}$ と $\Sigma^{4'}$ の equivariant tubular nbhd. を取りとったもの X^5 は, $S^4 \times \underline{S^2}$ と $\Sigma^{4'} \times S^2$ の間の T^5 -invariant な k -cobordism を与えてゐる。
 一方 $T^5 | S^4 \times \underline{S^2}$ は $A \times \alpha : S^4 \times \underline{S^2} \rightarrow S^4 \times \underline{S^2}$ であり,
 $T^5 | \Sigma^{4'} \times S^2$ は $T' \times \alpha : \Sigma^{4'} \times S^2 \rightarrow \Sigma^{4'} \times S^2$ と書ける。
 以上より明らかである。故に $X^5 / (T^5 | X^5)$ は,
 $(S^4 \times \underline{S^2}) / (A \times \alpha)$ と $(\Sigma^{4'} \times S^2) / (T' \times \alpha)$ との間の k -cobordism。
 (T, Σ^4) と $(T', \Sigma^{4'})$ が equivariant diffeo. であることより $(\Sigma^4 \times S^2) / (T \times \alpha)$ と $(S^4 \times S^2) / (A \times \alpha)$ とは diffeomorphic。
 Q. E. D.

この定理は, homotopy RP^5 は Brieskorn involution の orbit space として, すべて表わされるという結果を用

いて証明したのであるが、次の事が云えていれば、ただちに
 出る結果である。「homotopy RP^4 はすべて RP^4 に
 h -cobordant」。

ところが Cappell と Shaneson は、 RP^4 に、" k
 つかの $S^2 \times S^2$ を connected sum したものに關しては、
 homotopy type が等しい"が h -cobordant ではない
 のが存在することを証明した。

しかし著者は、 RP^4 に關する結果に關しては何れの手が
 かりを得ていない。