数理解析研究所講究録
170巻 1973年 128-137

三次元の孤立商特異点の解消について

京大 数研 藤木 明

複素多様体Xに有限群Gが作用する時,商空間X/Gが正規解析空間の構造を持つことが知られている。$\dim X=3$の場合には,X/Gの特異点の解消を,Gの作用を利用して構成しうる。このnoteではこれを述べる。

基本的なのは,次の場合である。Gを位数nの巡回群とし,そのgenerator gが,複素3次元空間$\mathbb{C}^3=\mathbb{C}^3(z_1,z_2,z_3)$に,

(1) $g:(z_1,z_2,z_3)\longmapsto(e_n z_1,\ e_n^p z_2,\ e_n^q z_3)\qquad (n,p)=(n,q)=1$

$0<p,q<n$, で作用するとする。ここで,$e_n^p=\exp\frac{2\pi i p}{n}$。

$N_{n,p,q}=\mathbb{C}^3/G$とおくと,これは原点に対応する点Pで孤立特異点を持つ。

<u>定理 1</u>

$N_{n,p,q}$の解消,$f:\tilde{X}\longrightarrow N_{n,p,q}$で次の性質を持つものが存在する。

1) $\tilde{X}$の有限開被覆$\{U_i\}_{i=1,\dots,l}$で次の性質を満たすものが存在する。

イ) $U_i\cong\mathbb{C}^3=\mathbb{C}^3(u_i,v_i,w_i)$

ロ) $f^{-1}(p)=\Theta$ とおくと，$\Theta\cap\mathcal{U}_i$ の既約成分は，(イ)の同型の意味で，) $\mathcal{U}_i$ の座標平面，たとえば $u_i=0$ に一致する。

ハ) $\mathbb{C}^3(z_1, z_2, z_3)$ に，$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$\alpha_i\in\mathbb{C}^*$ $i=1.2.3$，で作用する*) 自己同型 A_0 は，$N_{n,p,q}$ の自己同型 A を誘導するが，これが $\tilde{X}$ の自己同型 $\tilde{A}$ に拡張し，(i.e. $\tilde{X}$ の自己同型 $\tilde{A}$ が存在して $f\tilde{A}(x)=Af(x)$，$\forall x\in\tilde{X}$ が成立する) 各 $\mathcal{U}_i$ で，イ)の同型の意味で $\underbrace{(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)})}_{\text{for some}}$，$\alpha_\mu^{(i)}\in\mathbb{C}^*$ $i=1\cdots,l.$ $\mu=1.2.3.$，で作用する。

2) (本質的に上のイ). ロ) により) $\Theta=\bigcup_{i=1}^{t}\Theta_i$ を既約成分への分解とする時，① Θ_i は非特異有理曲面 for $i=1,\cdots t$ ② $\Theta_i\cap\Theta_j\neq\phi$ (for $i\neq j$) なら $\Theta_i\cap\Theta_j\cong\mathbb{P}^1$ かつ，交わりは transversal. ③ $\Theta_i\cap\Theta_j\cap\Theta_k\neq\phi$，for $i\neq j\neq k\neq i$，なら，それらは一点で transversal に交わる。④異なる4つの Θ_i は交わらない。⑤ $\Theta_i\neq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，$\neq\Sigma_1$ (ただし Σ_n は degree n の Hirzebruch 曲面) ⑥ $\pi_1(\Theta)=\{e\}$ (基本群)

*) 一般に $\mathbb{C}^3$ への action が $(z_1, z_2, z_3)\longmapsto(\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2, \alpha_3 z_3)$ $\alpha_i\in\mathbb{C}^*$ で表される時，これを $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と表す。

これを群 G の位数に関する帰納法で証明するためには situation を今少し一般にする必要があるが，ここではそれは述べずに，その際に上の situation を群 G の位数が p と q の場合に帰着する方法をのべる。すなわち複素空間 X_1 と正則写像 $f_1: X_1\to X$ で次の性質を持つものを構成する。: X_1 の3枚の開被覆 $\{U_0, U_1, U_2\}$ が存在し，$U_0\cong\mathbb{C}^3$，$U_1\cong\tilde{U}_1/H_1$，$U_2\cong\tilde{U}_2/H_2$ となる。ここ

で，$\tilde{U}_1$，$\tilde{U}_2$ は複素多様体，$\check{H}_1$．$\check{H}_2$ は各々位数 p，q の巡回群である。さらにこの時 X_2 の singular locus T は T_1 と T_2 の disjoint union となる。ただし T_1 (resp. T_2) は U_1 (resp. U_2) の singular locus である。[*)]

証明)(略証) 3次元 t-空間 $\mathbb{C}^3(t)$ から $\mathbb{C}^3(z)$ への被覆写像 φ を

$$(2)\quad \varphi : (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (z_1, z_2, z_3) = (t_1, t_2^{p}, t_2^{q})$$

で定義すれば，この被覆変換群 H は $H \cong H_1 \oplus H_2$　$H_1=\{h_1\}$．$H_2=\{h_2\}$

$$(3)\begin{cases} h_1 : (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (t_1, e_p t_2, t_3) \\ h_2 : (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (t_1, t_2, e_q t_3) \end{cases}$$

と表される。よって $N_{n,p,q} \cong \mathbb{C}^3(t)/G.H$．

ただし G の $\mathbb{C}^3(t)$ への action は (e_n, e_n, e_n) で定義する。G の action は φ と equivariant，i.e $g\cdot\varphi = \varphi\cdot g$。$\sigma : W_0 \longrightarrow \mathbb{C}^3(t)$ を原点での monoidal 変換とすると，もちろん W_0 は $\mathbb{P}^2$ 上の line bundle で，hyperplane bundle の inverse と同型。W_0 への G の action，(G．H_1．H_2 の action は自然に W_0 のそれへ拡張される。) の仕方から W_0/G は $\mathbb{P}^2$ 上の degree$(-n)$ の line bundle と同型。これを W とする。$\pi : W \longrightarrow \mathbb{P}^2$ を射影とし，(t_1, t_2, t_3) を $\mathbb{P}^2$ の同次座標と考え，$t_i \neq 0$ で定義される open sets を U_i とする。$V_i = \pi^{-1}(U_i)$　$i=1,2,3$，とおけば，$W = \bigcup_{i=1}^{3} V_i$　$V_i \cong \mathbb{C}^3$ が成立する。V_i の自然な座標に関して，H_1．H_2 の作用は次の形をとる。

$$(4)\begin{cases} & V_1 & V_2 & V_3 \\ h_1 & (1, e_p, 1) & (e_p^{n}, e_p^{-1}, e_p^{-1}) & (1, 1, e_p) \\ h_2 & (1, 1, e_q) & (1, 1, e_q) & (e_q^{n}, e_q^{-1}, e_q^{-1}) \end{cases}$$

*) f は proper modification になるようにとる。

ここでもし $p=8$ なら, 容易にわかるように, $\overline{V}_2/H$, $\overline{V}_3/H$ の解消は, 2次元の場合のそれに帰着され, $\overline{V}_1/H$ は非特異だから, これにより, $\overline{W}/H$ の非特異化 $f_{20}: \widehat{\overline{W}/H} \to \overline{W}/H$ が得られ, $\overline{W}/H$ から $N_{n,p,g}$ への自然な写像とこれとを合成すれば, $N_{n,p,g}$ の resolution が得られる。これは[2]で構成されたものと一致する。さて $p=8$ の場合の結果を利用して, $\overline{V}_2/H_1$ の resolution を explicit に構成し, これを今 $\psi_2: Z_2 \to \overline{V}_2/H_1$ と表わす。Z_2 は, $2s+1$ 個, for some $s \geq 0$ の開被覆 $\{U_0, \overline{W}_k^{(2)}, \overline{W}_k^{(3)}, k=1, \cdots s\}$ で覆われ, (c.f [2]) Z_2 に拡張された H_2 の作用は各 $\overline{W}_k^{(i)}, U_0$ で次の形をとることが確められる。

$$(5)\begin{cases} (1,\ 1,\ e_8) & \text{on } \overline{W}_k^{(2)} \\ (e_8^{-\mu_k},\ e_8^{\mu_{k+1}},\ e_8^{-1}) & \text{on } \overline{W}_k^{(3)} \qquad \text{for some } \mu_k, \mu_{k+1} \in \mathbb{Z} \\ (1,\ 1,\ e_8) & \text{on } U_0 \end{cases}$$

この式から, Z_2/H_2 の singular locus は, compact。さらに, $\overline{V}_3$ から同様に構成した Z_3 に対し, $\overline{V}_1/H \cup Z_2/H_2 \cup Z_3/H_1$ が 1つの複素空間を定義することがわかる。これを X_1 とおき, $U_0 = \overline{V}_1/H$, $U_1 = Z_2/H_2$, $U_2 = Z_3/H_1$, $\widetilde{U}_1 = Z_2$, $\widetilde{U}_2 = Z_3$, $\check{H}_1 = H_1$, $\check{H}_2 = H_2$ とおけばよい。この時 singular locus に関する statement は満たされている。morphism f_1 は自然に構成される。 q.e.d.

上の証明の detail ならびに, induction の完全な遂行は, 座標の explicit な計算によってなされる。同様の方法で, X の次元に関する帰納法を加えることにより, $\dim X > 3$ の場合にも定理1に

対応する事実を証明できることがほぼ確実である。

次に定理1を$\mathbb{C}^*$-actionを持つ特異点の解消に応用する。Lを、非特異曲面S上のline bundleとし、$\sigma: \mathbb{C}^* \times L \to L$を$L$の自然な$\mathbb{C}^*$-actionとする。$G$を、$\mathrm{Aut}_{\bullet} L$の有限部分群で、$\sigma$と可換なものとする。(ここで$\mathrm{Aut}\,L$は、$L$の自己同型群を表す。) 今$X = L/G$が0-sectionのimageの外では、特異点を持たないとする。

<u>Theorem 2</u>

Xの解消$f: \tilde{X} \longrightarrow X$で次の性質を満たすものが存在する。

1) $\tilde{X}$の$\mathbb{C}^*$-actionが存在し、(denoted by $\tilde{\sigma}$) $f \cdot \tilde{\sigma}(\tilde{x}) = \bar{\sigma} f(\tilde{x})$ for ${}^\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$ が成立する。ここで$\bar{\sigma}$は、Lの$\mathbb{C}$-action σにより誘導されたXの$\mathbb{C}^*$ action。

2) TをXのsingular locusとし、$f^{-1}(T) = \Theta = \bigcup_{\alpha=1}^{t} \Theta_\alpha$. Θ_α irreducible, とおくと、①各Θ_αは、非特異線織面 ② $\Theta_\alpha \cap \Theta_\beta \neq \phi$ for $\alpha \neq \beta$ なら、$\Theta_\alpha \cap \Theta_\beta$は非特異曲面で、$\Theta_\alpha$と$\Theta_\beta$の交わりはtranversal. ③ $\Theta_\alpha \cap \Theta_\beta \cap \Theta_\gamma \neq \phi$ for $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ なら、それらは有限個の点でtransversalに交わる。④どの4つのΘ_αも1点を共有しない。

略証) Tに属する点xに対し、任意に$s \in \pi^{-1}(x)$をとる。ここでπは、自然な商写像$L \to X$. Lの0-sectionを同じくSで表すと、仮定より$s \in S$。G_sをsのstability groupとすると、${}^\forall g \in G_s$は、s上のLのfibreの近傍での、Lの~~勝手~~適当なtrivializationに対し、(これを$\varphi_U: L_U \supset \mathbb{C} \times U$, $U \ni s$で表す。) 次の形で作用する。i.e. ζをφ_Uに対応す

る fibre coordinate とする時，$g: \zeta \mapsto \alpha(g)\zeta$, $\alpha(g) \in \mathbb{C}^*$。従って，$G_s \to \mathbb{C}^*$ なる準同型を $g \mapsto \alpha(g)$ で定義すれば，G_s は cyclic group の small group による extension であることがわかる。従って x の適当な近傍は，$D^3/G(x)$ と同型である。ここで D^3 は 3 次元の polycylinder $|z_i|<1$ $i=1,2,3$. $G(x)$ はこれに作用する有限巡回群. $D^3/G(x)$ の特異点の解消は，群 $G(x)$ の位数に関する帰納法により，定理 1 に帰着される。各点 x の近傍に対して構成した resolution が 1 つの複素多様体 $\tilde{X}$ をなすことをみるために次の lemma が必要である。

<u>Lemma</u>

X を 3 次元の V-manifold，$\{U_\alpha, G_\alpha\}$ を対応する X の被覆とする。G_α を有限群とし，U_α を polycylinder とする。U_α/G_α の，Theorem 1 ないし次の系で構成される resolution を $\tilde{\varphi}_\alpha: \widetilde{(U_\alpha/G_\alpha)} \to U_\alpha/G_\alpha$ とすると，$U_\alpha/G_\alpha \cap U_\beta/G_\beta \neq \phi$ in X なら，共通部分でそれらは一致する。(by abuse of language everywhere)

略証) G_α は small subgroup を含まないとしてよい。さら U_α の原点は U_β, $\beta \neq \alpha$ に含まれないとして差しつかえない。従って $U_\alpha/G_\alpha \cap U_\beta/G_\beta$ の singular locus は，$D^2/G \times D$，(D^2: 2次元の polycylinder. D: unit disc の内部) と local に同型。$\tilde{\varphi}_\alpha$ は，D^2/G の minimal resolution $\times$ id_D であり，一方これは，$D^2/G \times 0$，$(0 \in D)$。を support とする適当な ideal の sheaf の blowing up である。blowing up は座標のとり方に無関係だから ideal が決まれば $\tilde{\varphi}_\alpha$ と $\tilde{\varphi}_\beta$ は一致する。

q.e.d. q.e.d.

<u>Remark</u> n次元の場合(たとえば3次元)の Theorem 1 の resolution は.

非特異中心の有限回のmonoidal変換に分解できることが言えれば、同じlemmaは高次元でもその analogy を持つ。しかしこれはむつかしい。// さてLを negative とすれば、$\pi(S)$ exceptional。

<u>Corollary 3</u> Yを、Xにおいて$\pi(S)$を contract して得られる anal. space とする時、これは isolated singularity with $\mathbb{C}^*$-action であるが、これの resolution で 定理2の1)と2) ②③④を満たすものが存在する。条件①は、1つのΘ_α, say Θ_1を除いて非特異線織面、~~……~~ という条件でおきかえられる。

<u>Corollary 4</u> 3次元の polycylinder D^3に有限群Gが作用し、D^3/Gが原点に対応する点で isolated singularity を持つ時、この resolution $f: \tilde{X} \to X$ で定理1の1) 2)をみたすものが存在する。

略証) $G \subset GL(3, \mathbb{C})$と考えてよい。$\rho: W \to D^3$を原点でのmonoidal変換とする。Gのaction はWのactionにextendする。Wは$\mathbb{P}^2$上のline bundleの0-sectionの近傍と同一視されるから corollary 3の証明方法が適用しうる。この際$\pi(S) \cong \mathbb{P}^2/G$でこれは rational。$f^{-1}[\pi(S)]$が nonsingular になる事等は、定理1の際の計算による。//

<u>Remark.</u> もっと一般に、他の有限群HがD^3にactしている時、これがXのactionをも induce するならば、H-equivariant な resolution が存在する。

例) 系3の例として、Brieskorn variety の resolution が可能である。実際式 $z_0^{a_0}+z_1^{a_1}+z_2^{a_2}+z_3^{a_3}=0$ から、(?)をいとわなければ

explicit に resolution を construct する方法がある。(c.f [1]). たとえば、これから K が topological sphere なら resolution の結果できる surface は、すべて rational に限ることができる。この時は前頁の記号で $\pi(S)=\mathbb{P}^2$ となる。

最後に簡単な Brieskorn variety の、resolution の例をあげておく。これは上で述べた定理とは関係がない。

例1 $z_0^{a_0}+z_1^{a}+z_2^{a}+z_3^{a}=0$ の resolution, $f:\tilde{V}_a\longrightarrow V_a$ で次の性質をもつものが存在。$f^{-1}(p)=\Theta_0\cup\cdots\cup\Theta_t$ と既約成分に分解する時 (i) Θ_0 は $\mathbb{P}^2$ の l 枚の branched covering でその branch locus C は、$\mathbb{P}^2$ 内で (z_1, z_2, z_3 を $\mathbb{P}^2$ の同次座標とみて) $z_1^a+z_2^a+z_3^a=0$ で定義される非特異曲線。$\Theta_i\cong\mathbb{P}^1$-bundle over C $i=1\cdots t$. $\Theta_i\cap\Theta_{i+1}\cong C$ for $i=0,\cdots,t-1$.

(ii) $\Theta_1\cap\Theta_0=\bar{C}$ とおくと、$N_{\Theta_0/\tilde{V}_a}\cong-\frac{a'p'+1}{a'a_0'}[\bar{C}]$, $N_{\Theta_i/\tilde{V}_a}|_{F_i}\cong-b_iH_{F_i}$ $(i=1\cdots t)$ が成立する。ここで、$l=(a_0,a)$ $a_0=a_0'l$ $a=a'l$. p' は $-(a'p'+1)\equiv 0\pmod{a_0'}$ $0<p'<a_0'$ により決まる数。b_i は、$n=a_0'$ と p から Hirzebruch [ ] の algorithm により決まる数。ただし p は $p\equiv-a'\pmod{a_0'}$ $0<p<a_0'$ により決まる数。F_i は $\mathbb{P}^1$-bundle Θ_i の任意の fixed fibre。N は normal bundle.

(a) 特に $l=1$ なら $\Theta_0\cong\mathbb{P}^2$ (ii) から $N_{\Theta_0/\tilde{V}_a}\cong-\frac{ap'+1}{a_0}H_{\Theta_0}$. ただし H_{Θ_0} は、Θ_0 の hyperplane bundle。よって Θ_0 が第一種例外曲面 $\longleftrightarrow ap'+1=a_0$ $\longleftrightarrow a\,|\,a_0-1$

(b) $l=1$ の時さらに $b_i=2$ $\forall i\longleftrightarrow a-1\,|\,a_0$ 従って Θ_0 が第一種例外曲面かつ $\forall i$ に対して $b_i=2\longleftrightarrow a_0=(sa-1)(a-1)$, $s=1,2,3,\cdots\cdots$。

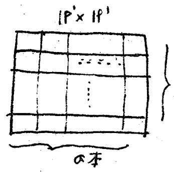
(c) $a=2$ の時, イ) d が奇数の時 a) より $\Theta_0 \cong \mathbb{P}^2$ で第一種例外曲面。$\Theta_i \cong \Sigma_2$ ($i=1 \cdots s$) で $b_i=2$。ロ) d が偶数の時, $\Theta_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. $\Theta_i \cong \Sigma_2$ ($i=1 \cdots s$) で $b_i=2$。$N_{\Theta_0/\hat{V}_a} = -[\bar{C}]$. $\bar{C}$ は Θ_0 の diagonal だから Θ_0 は第一種例外曲面。$b_1=2$ より Θ_0 を contract すれば次に Θ_1 が第一種例外曲面になる。以下順々 Θ_i を contract すると最后に $\mathbb{P}^1$ がのこる。(a) の場合を除き Θ_0 が ruled surface, ($\mathbb{P}^1$-bundle) になるのはこの場合しかない。よって Θ が curve に contract できるのはこの場合しかない。

(d) a_0 / a の時, $n=1$ の時 $f^{-1}(0) = \Theta_0$. $N_{\Theta_0/\hat{V}_a} = -[\bar{C}]$。実際 $\hat{V}_a \cong (-[\bar{C}]$ なる line bundle の bundle space)

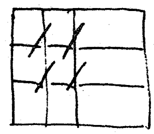
例の証明) $\mathbb{C}^4$ 内の line L: $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ は V_a と原点のみを共有する。$\sigma: W \longrightarrow \mathbb{C}^4$ を L に沿っての monoidal 変換, $\bar{V}_a$ を σ による V_a の proper transform とする。$\sigma^{-1}(0) \cap \bar{V}_a \cong \mathbb{P}^2$ で, $\sigma|_{\bar{V}_a - \sigma^{-1}(0) \cap \bar{V}_a}$ は isomorphism である。$\bar{V}_a$ の $\mathbb{P}^2$ に沿う singularity をはずせばよい。monoidal 変換の定義から $\bar{V}_a$ の方程式は local に $Z_0^{a_0} = \zeta Z_1^{a}$, (ここで ζ は $\bar{V}_a \cap (\sigma^{-1}(Z_1^a + Z_2^a + Z_3^a = 0)$ の local equation) と書ける。これから Θ_i, $i=0 \cdots s$ に関する statement がでる。ii) の normal bundle に関しては, たとえば, 函数 Z_0 が $\hat{V}_a$ 上に induce する divisor が linearly equivalent to 0 を利用して証明できる。

<u>例 2</u> $Z_0^{a_0} + Z_1^{a_0} = Z_2^{b} + Z_3^{b}$ $V_{a,b}$ の resolution $f: \hat{V}_{a,b} \longrightarrow V_{a,b}$ が次のように構成される。1) $Z_0 = Z_1 = 0$ による $\mathbb{C}^4$ の monoidal 変換, followed by $Z_2 = Z_3 = 0$ の proper transform を center とする monoidal 変換。これを $\sigma: W_1 \longrightarrow V_{a,b}$ とすると, $\sigma^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。2) $Z_0^a + Z_1^a = 0$, $Z_2^b + Z_3^b = 0$ に

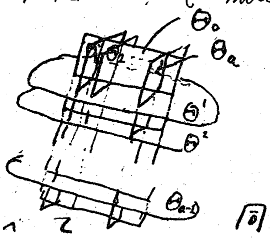
対応する $\sigma^{-1}(0)$ 上の ab 個の点の各々において、対応する2平面の交わりを center とする blowing up を行う。これと σ との合成を $\sigma_1 : W_1 \longrightarrow V_{a,b}$ と表すと、$\sigma_1^{-1}(0)$ は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ から上の ab 個の点で monoidal 変換して得られる非特異曲面。$\sigma^{-1}(0)$:



b本 ← $\sigma_1^{-1}(0)$



3) W_1 を normalization すると、a+b 本の line の proper transform に沿って（これらは今や互いに交わらない）$x^n = \zeta y^p$ $(n, p)=1$ type の特異点を生ずる。これによって $V_{a,b}$ の resolution を得る。これは定理2で construct した Brieskorn variety の resolution とは異る。実際その方法では $\sigma^{-1}(0)$ の ab 個の点の逆像は2次元でなければならない。$b=a-1$ の時は上の方法を少し modify して次の絵のような resolution ができる。



ここで $\Theta_0 \cong \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, Θ_i $i=1,\cdots,a$ は $\mathbb{P}^1$-bundle over $\mathbb{P}^1$ ですべて同型。Θ^i ~~と rational~~ はすべて同型。

これらからたとえば3次元の resolution が全然 unique でないことが観察できる。

reference

[1] Hirzebruch-Jänich : Involutions and Singularities ; Algebraic geometry. papers presented at the Bombay Colloquium. (1968)

[2] Ueno : On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dim 2. I. Singular fibres of the 1st kind. Journal of the Faculty of Science. Sec I A Vol 18 No 1 p37-95 (1971)