数理解析研究所講究録
170巻 1973年 94-103

Relative spinnable structure について

学習院大 理　水谷忠良

§0 Introduction

I. Tamura と H. Winkelnkemper は多様体(closed)の軸(=axis)を定義してそれぞれ codimension 1 foliation の存在, inertia group 及び "fibering within cobordism" の問題を解くのに応用した。

ここでは boundary が既に S^1 上の fibre bundle になっている境界つき多様体の軸を探す問題を考える。

§1 Definition

<u>Def</u>　W を Compact connected differentiable manifold で ∂W が <u>connected</u> で S^1 上の fibre bundle の total space に成っているものとする。

この時 W が spinnable 又は spinnable structure をもつとは次の 1, 2, 3, の条件を満足する時をいう。

1. codimension 2 の closed differentiable submanifold $X \subset \mathrm{Int}\,W$ があり その normal bundle が trivial である。

2. X の tubular neighbourhood を $X \times D^2$ で表わす。
$E = W - \mathrm{Int}\,X \times D^2$ とおくと E は S^1 上の fibre bundle である。$\xi : E \longrightarrow S^1$ を projection map とする。

3. X の normal bundle の trivialization を適当にとる時 次の commutative diagram が成立する。

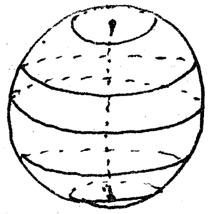
$$
\begin{tikzcd}
\partial E \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\mathrm{projection}"'] & E \arrow[d, "\xi"] \\
 & S^1
\end{tikzcd}
$$

ただし ι は inclusion map, projection は ∂E を X上の trivial S^1 bundle とみた時の S^1 成分への projection である。

X を spinnable structure の axis $\xi : E \longrightarrow S^1$ の fibre を generator, $\xi : E \rightarrow S^1$ 自身を spinning bundle と呼ぶ。

注 ① I. Tamura [2], Winkelnkemper の 定義を relative case に拡張するやり方は ∂W に条件をつけないようにすることもできる。(axis を boundary のある多様体にする)

図で例を示すと、



$D^3 - I\times \mathring{D}^2$ が S^1 上の bundle で ∂D^3 も spinnable structure が定義されている。

knot $\longleftrightarrow$ spinnable structure の対比の面からはこちらの方が自然かもしれない。上の定義は foliation への応用を考慮したものである。

② ∂W が connected という仮定は本質的でないが、以下では connected な場合を主に考える。

③ generator F は ∂W の fibre と axis X の cobordism になる。

§2 定理

次の定理を証明するのが目的である。

定理（Relative spinnable structure の存在）

W を $(2m+1)$-次元 manifold で、W 及び $\partial W \to S^1$ の fibre M が simply connected ($m \geq 3$) とする。

この時 W は spinnable である。

証明

W, M を上の通りとする時 W の handle body で次のようなものが存在する。

① $M(m)$ は $M\times I \subset \partial W$ に m-次元までの handles を attach したもの。

② $H_k(M(m), M\times I) \cong H_{m-1}(W, M\times I)$, $k \leq m-1$,

$H_m(M(m), M\times I) \to H_m(W, M\times I)$ onto

但し map は inclusion map に induce されたもの。

$M(m)$ の存在は大体次のようにして示すことができる。

$\pi_1(M) = \pi_1(W)$ を用い, relative Hurewicz 定理より

$\pi_2(W, M\times I) \cong H_2(W, M\times I)$

$H_2(W, M\times I)$ の generator を imbedding $(D^2, \partial D^2) \to (W, M\times I)$ でとり さらに $H_2(W, M\times I)$ に relation をいれている disc (Torsion を生じさせている disc) を imbedding でとる。

(general position で $m \geq 3$ なら可能)。

$M(2) = (M\times I$ に $H_2(W, M\times I)$ の free generator に対応する 2-handles 及び Torsion を作る 3-handles を attach した handlebody) とする。

次の exact Sequence を得る。

$$H_2(M(2), M\times I) \xrightarrow{\varphi} H_2(W, M\times I) \to H_2(W, M(2)) \xrightarrow{\psi}$$

$$H_1(M(2), M\times I) \underset{exc^{-1}}{\cong} H_1(\Sigma D^2, \Sigma \partial D) = 0.$$

φ は作り方より isomorphism, ψ は zeromap であるから

$H_2(W, M(2)) = 0$ がいえる。一方 Van-Kampen の定理より $\pi_1(M(2)) = 0$ であるから、再び Hurwicz を用いて

$\pi_3(W, M(2)) \cong H_3(W, M(2))$ が言える。

又、$H_3(W, M\times I) \cong H_3(W, M(2))$ が容易に示せるから、$M(2)$ の場合と同様に、$m \geq 4$ なら

$M(3) = M(2) \cup H_3(W, M\times I)$ の free generator に対応する handles $\cup$ $H_3(W, M\times I)$ の Torsion をなす 4-handles が作れる。

帰納的に $M(m-1)$ までは同様に構成できる。

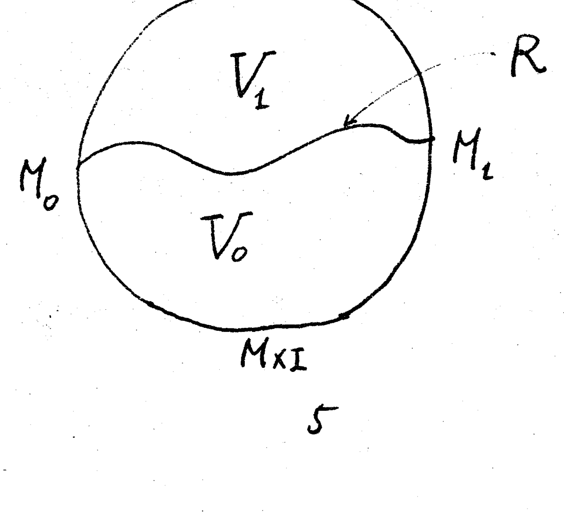
$M(m) = M(m-1)$ に $H_m(W, M\times I)$ のすべての generators に対応する handles を attach したもの と定義する。この $M(m)$ が条件を満すことは明らかである。

$V_0 = M(m)$, $V_1 = W - \mathrm{Int}\, V_0$

$R = \partial V_0 - M\times I = \partial V_0 - (\partial V_0 \cap \partial W)$

$\partial R = M_0 \cup M_1$ (M の copies の disjoint union)

とおく。



lemma 1 $\pi_1(R, M_0) = 0$

証明. $f : (I, \partial I) \longrightarrow (R, M_0)$ を $\pi_1(R, M_0)$ の元を表わす differentiable map とする。$\pi_1(V_0, M_0) = 0$ は仮定より容易に示されるから. f の拡張 $\tilde{f} : (D^2, I) \longrightarrow (V_0, M_0)$ が存在する。ところが (V_0, M_0) は $(m+1)$-次元以下の complex の homotopy type をもつので. $m \geqq 3$ の仮定のもとでは. $(2m+1) > 2 + m+1$ より general position により $\tilde{f}$ を $\bar{\bar{f}} : (D^2, I) \longrightarrow (R, M)$ へ縮めることができる。Q.E.D.

lemma 2 $H_i(R, M_0) \cong H_i(V_0, M_0) \cong H_i(V_1, M_0)$ $i<m$,

$$H_m(R, M_0) \cong H^m(V_0, M_0) \oplus H_m(V_0, M)$$

$$\cong H^m(V_1, M_0) \oplus H_m(V_1, M).$$

証明 $V_0 \supset R \supset M_0$ に関する exact sequence

$$\rightarrow H_{i+1}(V_0, R) \rightarrow H_i(R, M_0) \rightarrow H_i(V_0, M_0) \rightarrow H_i(V_0, R) \rightarrow$$

$$H_{i+1}(V_0, R) \underset{\text{Poincare duality}}{\cong} H^{2m-i}(V_0, M) \qquad H_i(V_0, R) \underset{\text{P.D.}}{\cong} H^{2m+1-i}(V_0, M)$$

(V_0, M) は m 次元の complex の homotopy type をもつから. $i \leq m-1$ の時 $H^{2m-i}(V_0, M) = H^{2m+1-i}(V_0, M) = 0$

$i = m$ の時. $0 \rightarrow H_{m+1}(V_0, R) \rightarrow H_m(R, M_0) \rightarrow H_m(V_0 M_0) \rightarrow 0$ ところが $H_m(V_0, M_0)$ は free だから. (1), $i \leqq m-1$ の時 $H_i(R, M_0) \cong H_i(V_0, M_0)$

(ロ) $i=m$ の時 $H_m(R, M_0) \cong H^m(V_0, M) \oplus H_m(V_0 M)$ が言える。同様に $V_1 \supset R \supset M_0$ に関する sequence と Poincaré duality を用いて $(V_1 M)$ の homology に関する同型も得られる。 Q. E. D.

次に (R, M_0) を $(W, M\times I)$ と同様に handle 分解して，manifold F を定義する。即ち F は M_0 に handle を低い次元から attach して $H_i(F, M_0) \xrightarrow{\cong} H_i(R, M_0)$ が同型 $(i<m)$ であり，m-handles としては $H_m(R, M_0) \cong H^m(V_0 M) \oplus H_m(V_0, M)$ の同型を用い，$H_m(V_0, M)$ の generator に対応する handles と $H_{m-1}(R M_0) \cong H_{m-1}(V_0, M)$ の torsion をなしている handles を attach したものとする。($\pi_1(RM)=0$ により m-disk の double point 等は除ける。) もちろん F は $2m$ 次元の manifold で m 次元の complex の homotopy type をもつ。

lemma 3　V_0 は $F_0 \times I$ に diffeomorphic である。

証明　inclusion map $i: F \to V_0$ が homotopy equivalence であることを示す。F のつくり方より $H_k(F, M_0) \cong H_k(V_0, M_0)$ であるから，次の exact sequence から明らか。

$$\begin{tikzcd}
H_{k+1}(F, M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_k(M_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_k(F) \arrow[r] \arrow[d] & H_k(F, M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{k-1}(M) \arrow[d, "\cong"] \\
H_{k+1}(V_0 M) \arrow[r] & H_k(M_0) \arrow[r] & H_k(V_0) \arrow[r] & H_k(V_0 M_0) \arrow[r] & H_{k-1}(M_0)
\end{tikzcd}$$

従って relative h-cobordism therem により。
$V_0 = F \times I$. Q.E.D.

定理の証明

$H_k(F, M_0) \xrightarrow{i_1} H_k(V_1, M)$ を考えると。

$k < m$ では $H_k(F, M_0) \cong H_k(V_0, M_0) \cong H_k(V_1, M_0)$ で同型である。$k = m$ で $H_m(W, M)$ が Torsion free の時は $H_m(V_0, M) \cong H_m(W, M) \cong H_m(V_1, M)$ が容易に示せて i_1 は $k = m$ でも同型となり、上と同様に five lemma により i_1 は homotopy equivalence になり $V_1 = F \times I$ が言える。

即ち $W = F \times I \cup F \times I$ となり W は spinnable である。$H_m(W, M)$ が Torsion をもつ場合には I. Tamura [3] (Theorem 7) と同様に、上の F をとりなおせばよい。

以上で定理の証明を終る。

§ 3 Examples.

(1). M を closed Manifold とする時 $M \times D^2$ は $M \times I$ を generator とする trivial な spinnable structure をもつ。

(2) $f : S^1 \times S^k \times D^{2m-k} \longrightarrow S^{2m+1}$ を homotopically trivial な imbedding とする。この時 $S^{2m+1} - \mathrm{Int}(\mathrm{Image}\, f)$ は specially spinnable (即ち S^{2m-1} を axis とする spinnable

structureをもつ）である。これは、$S^{2m+1}=S^{2m-1}\times D^2\cup D^{2m}\times S^1$ の分解において Image $f\subset S^1\times D^{2m}$ととれることより明らかである。

(3). $S^{2m+1}\times D^2$ は $S^m\times S^{m+1}$ を axis とする spinnable structure をもつ。これは、S^{2m+3} が $S^m\times S^{m+1}$ を axis とする spinnable structure をもつことから容易に導びかれる。

Compact manifold の Codimension 1 の foliation の存在に関しては、$M\times D^2$ に boundary を leaf とする foliation があるかどうかが重要な問題であるが、今までのところ $M=$ odd dimensional sphere $=S^{2m+1}$ の場合しか解っていない。

closed manifold の場合は、$(m-1)$-connected $(2m+1)$-manifold の axis を surgery して specially spinnable にした。しかし、relative の場合同様のことは言えない。かえって、$S^k\times S^{k+1}\times D^2$ は specially spinnable でないことが簡単に示される。(cohomological な structure を用いて)

ただし closed の場合と同様に例えば、$M\times D^2$ に sphere の spinnable structure を connected sum に、$M\times D^2$ の spinnable structure で axis $=M\#$(sphere の spinnable structureのaxis）となるようにaxisの変形を行うことができる。しかしこの操作は foliationの問題を解くには直接役立たない。

従って relative spinnable structure の axis の "surgery" が出きるかは重要な問題である。

具体的な問題としては

$(S^k \times S^{k+1} \# S^k \times S^{k+1}) \times D^2$ の axis で S^1 上の fibre bundle になるものがあるか など興味深い問題であろう。

参考文献

[1] S. Smale, On the structure of manifolds, Amer. J. Math, 84 (1962)

[2] I. Tamura, Spinnable structures on differentiable manifolds Proc. Japan Acad. 48 (1972) 293-296.

[3] I. Tamura, Foliations and Spinnable structures on manifolds (to appear)

[4] H.E. Winkelnkemper, Manifolds as open books (to appear)