数理解析研究所講究録
170 巻 1973 年 88-93

小平次元の加法公式について

名大理 中村 郁

以下扱うのは コンパクトな複素多様体です。コンパクトな複素多様体 X の小平次元 (κ) は次の様に定義されます。X の canonical line bundle K (X を複素 n 次元とすれば 正則 n 型式の芽の層といってもよい) をとり $P_m = \dim H^0(X\ K^{\otimes m})$ とします 任意の m に対して $P_m = 0$ ならば $\kappa(X) = -\infty$, ある m_0 に対して $P_{m_0} = 1$ で 任意の m に対して $P_m \leqq 1$ ならば $\kappa(X) = 0$ とします。次に $\exists m_0$ に対して $P_{m_0} \geqq 2$ となる場合は

定理(飯高) $\exists \kappa > 0$ (integer), $\exists \alpha, \beta > 0$, 十分大な m_1

s.t. $\alpha m^\kappa \geqq P_{mm_1} \geqq \beta m^\kappa$ for $\forall m > 0$

によって $\kappa(X) = \kappa$ とします。この κ は幾何学的には次のような意味をもちます。$H^0(X\ O(K^{\otimes m})) = \{\varphi_0, \cdots, \varphi_N\}$ (基底) $N+1 = P_m$

基底を一つ定めるごとに 有理写像

$$\Phi_{mK} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}} \ (N \text{次元複素射影空間})$$

が定まります 即ち $x \longmapsto (\varphi_{0j}(x), \cdots \varphi_{Nj}(x)) \in \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ が well-defined. このとき $\kappa = \max_m \dim \Phi_{mK}(X)$ となります

このκに関しては 飯高さんの基本的結果がいくつかありますが 文献[1] を参照して頂くことにして ここでは省きます。P_m やκは2次元(複素)の場合 分類上非常に重要な役割を果たしてきました。(実際 2次元の分類は P_m でなされるといってもよい位) 高次元の分類理論(に近い理論)を進めるにあたって 2次元までの結果を拡張してみようというのが基本的立場です ここでは 飯高さんの問題(それはしばしば否定的に解かれているが)で比較的肯定的に解かれた例を述べます. (X, F, Bはコンパクト複素多様体)

問題 Xを底をB, ファイバーをFとする解析的ファイバーバンドルとする そのとき $\kappa(X) = \kappa(B) + \kappa(F)$ か?

答は Fが代数多様体なら正しく 一般の場合には反例がある(反例は飯高さんによる)

詳しくは

I. Nakamura and K. Ueno An addition formula for Kodaira dimensions of algebraic fiber bundle (to appear in J. Math Soc. Japan).

を参照して下さい.

差 V(コンパクト複素多様体)の双有理自己同型写像 g は 自然に $\underbrace{g^*}_{\text{同型写像}}: H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m})) \longrightarrow H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ を引き起こします

即ち　各 m に対して　準同型写像

$$\rho_m : Bim(V) \longrightarrow GL(H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m})))$$

が定義されます.

定理1　V を代数多様体とすれば　任意の m, $g \in Bim\,V$ に対して　$\rho_m(g)$ は位数有限

ところで群論の結果

定理(Schur)　$GL(N, \mathbb{C})$ の部分群が　有限生成かつ任意の元が位数有限ならば　実はその部分群は有限群.

から

系　X を F をファイバーとするファイバーバンドル（底 B: コンパクト）とする.　G をこのファイバーバンドルの構造群（有限生成と仮定してよい）とする時　任意の m に対して　$\rho_m(G)$ は有限

この系により

定理2.　X, B, F を前の通りとすれば

$$\kappa(X) = \kappa(B) + \kappa(F)$$　が成り立つ.

が証明されます.

定理1の証明のために

補題1　$\rho_m(g)$ の固有値の絶対値は1　（V ~~X~~ 代数的と仮定しないでよい）

補題2　$\rho_m(g)$ は対角化可能　（　〃　）

補題3　$\rho_m(g)$ の固有値は代数的整数　（　〃　）

補題4　X 代数的ならば　$\rho_m(g)$ の固有値は　1の巾根

$\pi: \tilde{V} \to V$ 正則かつ全射写像 $\tilde{V}$の双有理同型写像 $\tilde{g}$ とがあって $\begin{cases} \tilde{g}^*\omega = \beta\omega, \ \beta^m = \alpha \\ \omega^{\otimes m} = \varphi \end{cases}$

とできる を証明します。これより Vに対する $m=1$ の場合と同様にして βは(従って αも)代数的整数が導かれる. 詳しいことは省きますが, $\tilde{V}$としては canonical line bundle の全空間 K に φ の零点として定義される部分空間の非特異モデルをとり $\tilde{g}$ は g により K に自然に引き起こされる変換(の制限)をとります.

補題4の証明) 補題1から補題3までは Vの代数的なことを全く用いていませんが ここでは用います. Vが $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$に埋蔵されている場合に証明すればよいことが知られています(Moisezonの定理)。証明には 整数論の良く知られた補題(定理?)

"α: 代数的整数とする. αの$\mathbb{Q}$上の任意の共役の絶対値が1ならば αは1のベキ根"

従って $\rho_m(g)$の1つの固有値αに対して その共役α^σに対して 適当に 代数多様体 V^σ とその双有理写像g^σ 及び $H^0(V^\sigma, \mathcal{O}(K_{V^\sigma}^{\otimes m}))$ の元 φ^σ で $(g^\sigma)^*\varphi^\sigma = \alpha^\sigma\varphi^\sigma$ となるものの存在を示せば すでに示した補題1より $|\alpha^\sigma| = 1$ となって証明がおわります. そのために Vの$\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$での定義式を

$f_1 = \cdots = f_e = 0$, とします. f_iは多項式.

従って 補題2と補題4により $\rho_m(g)$ は有限位数が結論されます. また ここでは不要ですが 補題1と2を併せると $\mathrm{Bim}\,V$ の(単位元の)連結成分 $(\mathrm{Bim}\,V)^0$ に対して $\rho_m(\mathrm{Bim}(V)^0)=1$ となることもわかります

補題1の証明) $\varphi\in H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ に対して ノルム$\|\ \|$を次の様に定義する. $\varphi=\{\varphi_j (dz_j^1\wedge\cdots\wedge dz_j^n)^{\otimes m}\}$ とすると

$$\|\varphi\| = (\sqrt{-1})^{-n^2}\int_V |\varphi_j|^{\frac{2}{m}}\, dz_j^1\wedge\cdots\wedge dz_j^n\wedge d\bar{z}_j^1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_j^n$$

明らかに $\|g^*\varphi\|=\|\varphi\|$. $\rho_m(g)$の固有値の一つをα, αに対応する固有ベクトルを$\varphi(\neq 0)$ とすれば

$\|g^*\varphi\|=|\alpha|^{\frac{2}{m}}\|\varphi\|$, $\|\varphi\|>0$ 従って $|\alpha|=1$

補題2の証明) 上と同じノルムを用います. 今 $\rho_m(g)$ が対角化可能でないとすると $\varphi_1,\varphi_2\in H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ $\varphi_i\neq 0$ で $g^*\varphi_1=\alpha\varphi_1+\varphi_2$, $g^*\varphi_2=\alpha\varphi_2$ となるものが存在します. $\|\varphi_1\|=\|(g^l)^*\varphi_1\|$ (任意の整数lに対して)

$(g^l)^*\varphi_1=\alpha^l\varphi_1+l\alpha^{l-1}\varphi_2$.. 右辺は$l$を大きくすると無限大になる(矛盾)。

補題3の証明) $m=1$の時 $H^0(V, \mathcal{O}(K_V))\hookrightarrow H^n(V, \mathbb{C})$ と見なせる. また $H^n(V, \mathbb{C})=H^n(V, \mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ で g^*の固有値が代数的整数となることは明らか。 $m>1$ に対しては $\rho_m(g)$ の固有ベクトルφ (固有値α) に対して $\tilde{V}$ (コンパクトn次元複素多様体) と $\tilde{V}$上の正則n型式の

αをその共役α^σに移すようなQ上の体$\mathbb{Q}(\alpha)$ Galois closure の自己同型σのCまでの拡張を再びσで表わし．$f_1^\sigma = \quad = f_\ell^\sigma = 0$で定義される代数的集合を$V^\sigma$とすれば容易に$g^\sigma$, g^σなどが構成されて，必要な条件を満たすことがわかります（証明終）

文献

[1] 飯高 茂　代数多様体の種数と分類　数学 24 (1972) 14−27