数理解析研究所講究録
170巻 1973年 62-77

2次元 normal singularity について

都立大 理 渡辺 敬一

§1. 序

特異点の解消の問題が解かれた現在、次の問題は特異点それ自体に注目し、その性質を調べる事であろう。2次元の normal singularity については、特に良い性質をもつもの（rational singularity）については、かなり古くから、多くの論文があるが、それ以外の singularity についても、最近 Wagreich、Orlik などの研究により進歩が著しい。本稿では、singularity の「グラフ」の話を中心としてそれらの結果を紹介して行きたい。なお、証明は参照する原論文を見て頂きたい。

§2. Resolution とそのグラフ.

$x \in X$ が2次元[(*)] normal singularity とする。簡単の為、$X-\{x\}$ は特異点をもたないとしておく。 $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ が singularity の resolution であるとは、($\tilde{X}$ は non-singular) π は proper で、π は

(*) complex analytic space のカテゴリーで考える.

$\tilde{X}-\pi^{-1}(x)$ と $X-x$ の biholomorphic map をひき起す事をいう。このとき、$\pi^{-1}(x)$ は（一般に reducible で、特異点をもつ）一次元 compact connected analytic variety になる。このとき、$\pi^{-1}(x)=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ と、$\pi^{-1}(x)$ を既約成分に分解しておく。

（1） π が X の <u>minimal resolution</u> とは、$\pi=\varphi\circ\pi_1$ と分解するような X の resolution π_1 が存在しない事。よく知られているように、

π が minimal $\Leftrightarrow$ $A_i\cong\mathbb{P}^1$, $A_i^2=-1$ なるものが存在しない。

X の minimal resolution は unique である。（[L]、V章）.

（2） X の resolution π が次の条件をみたとき、π は <u>good resolution</u> であるという。

（i） A_i は non-singular （$\forall i$）

（ii） A_i と A_j が交わるときは、transversal に交わる。

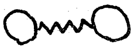
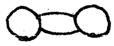
（iii） $A_i\cap A_j\cap A_k=\phi$ （i, j, k は互いに異る）.

good resolution は必ず存在する. good resolution は一般に minimal ではないが、good resolution たちの中に最小のものが存在する。（[L]、V章参照）

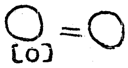
（3） $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 又は resolution π に対応する <u>グラフ</u> を次のように定義する。

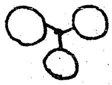
（i） 各 curve A_i には頂点（○であらわす）が対応する。

（ii） A_i と A_j が交わっているとき、A_i と A_j に対応する頂

点を線で結ぶ（ *transversal* に交わるとき  、*multiplicity* 2の点で交わるとき  と書く．異なる2点で *transversal* に交わっているとき、 ）

(iii) A_i に対応する頂点の中に A_i^2 を表わす数字を入れる。（$A_i^2=-n$ のとき $-n$ と書く）。但し、$A_i^2=-2$ のときは（これが最も多いので）何も書かない。（-2 =  ）.

(iv) A_i の *genus* が g のとき、 と書く。但し、A_i が *non-singular rational* のときは何も書かない（  ）.

(v) 三つ以上の *curve* が一点で互いに *transversal* に交わっているとき、 などと書く事にする。

（説明は面倒だが §6. の例を見れば一目瞭然であろう．）

☆ 与えられたグラフに対し、そのグラフをもつ $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ を2次元 *manifold* の中に実現する事ができる。（ Hirzebruch [4] 参照）

(4) M が2次元 *manifold*, $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ を M の1次元 *compact connected subvariety* とする．このとき、

A が *contractible* $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\pi : M\to X$, X は2次元 *analytic variety* で、$\pi(A)=\{x\}$, $\pi|_{M-A} : M-A \xrightarrow{\sim} X-\{x\}$ (*biholomorphic*).

$\pi(A)=x$ が X の *normal point* である事を要請すれば、このような π は *unique* に定まる。

Theorem A. (Grauert).

$A\subset M$ が contractible $\Leftrightarrow$ 交叉行列 $(A_i.A_j)_{1\le i,j\le n}$ が負定値.

(5) 与えられたグラフに対して、交叉行列 $(A_i.A_j)$ がきまるが、この行列が負定値である事を判定するのに、次の補題が有用である。

Lemma (Artin, [1])

① $(A_i.A_j)$ が negative semidefinite $\Leftrightarrow \exists Z=\sum n_iA_i>0$, $\forall i$, $Z.A_i\leqq 0$.

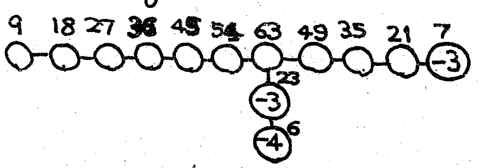
② 更にこのとき、$(A_i.A_j)$ が negative definite $\Leftrightarrow Z^2<0$.

($A=\bigcup A_i$ は連結より、①の Z に於て, $\forall i$, $n_i\geqq 1$ となる.)

(6) Fundamental cycle.

$Z_1=\sum n_{1i}A_i$, $Z_2=\sum n_{2i}.A_i$ があり、$Z_1>0$, $Z_2>0$, $Z_1A_i\leqq 0$ $Z_2.A_i\leqq 0$ $(i=1,\dots,n)$ とする。このとき $Z=\sum n_iA_i$, $n_i=\min(n_{1i},n_{2i})$ とすると、$\forall i$, $Z.A_i\leqq 0$ である事がわかる.
即ち、$\{Z>0 \mid Z=\sum n_iA_i \ \& \ Z.A_i\leqq 0\ (i=1,\dots,n)\}$ は最小元をもつ. ($Z'=\sum n_i'A_i\geqq Z=\sum n_iA_i \Leftrightarrow n_i'\geqq n_i\ (\forall i)$)。この最小元を $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ の(又は対応するグラフの)fundamental cycle という。グラフに対して fundamental cycle は一意的に決まるが、グラフが複雑になると、その決め方は易しくないようだ。

例. $x^7+y^9+z^{11}=0$ の resolution の fundamental cycle は



(A_i に対応する ○ の上の数字が n_i を表す.)

（7）(X,x)，(X',x') が x,x' の近傍でそれぞれ $\mathbb{C}^N$，$\mathbb{C}^{N'}$ に埋めこまれているとし，$S_\varepsilon^{2N-1}=\{z\in\mathbb{C}^N \mid |z|=\varepsilon\}$，$K=X\cap S_\varepsilon^{2N-1}$，$K'=X'\cap S_\varepsilon^{2N'-1}$ とする．もし (X,x) と (X',x') のある resolution（例えば minimal resolution）が同じグラフをもつならば，$K\cong K'$ (diffeo) である。（K は $A=\pi^{-1}(x)$ の tubular nbd. の boundary である.）。この理由から、resolution のグラフで singularity を分類する事を singularity の topological な分類という．

（8）<u>グラフによる基本群 $\pi_1(K)$ の計算.</u>

グラフは K の topology を決めるから、当然 $\pi_1(K)$ を決める訳だが、$\pi_1(K)$ の生成群と relation はグラフを用いて容易に決る.（Mumford [7]，Wagreich [12] 参照)。Wagreich は [12] で、$\pi_1(K)$ が solvable となる singularity のグラフをすべて列挙している。

§3. Singularity の "genus" について.

Wagreich は [11] に於て singularity について 2つの "genus" を定義している。彼の "arithmetic genus" については、筆者はその必然性を理解しているとは云い難いのだが、"genus" を最初に定義したのが彼なので、彼に従って定義しておく。

（1）$p_g(\mathcal{O}_x)$（geometric genus）の定義.

$\pi:\tilde{X}\longrightarrow X$ を X の resolution とし、$R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$（$U\subset X \rightsquigarrow$

$H^1(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ で定義される sheaf) を考える。π は proper より、$R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ は coherent で、$\mathrm{Supp}(R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})) \subset \{x\}$. 故に、$\dim_{\mathbb{C}}(R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}))_x < \infty$ だが、$p_g(\mathcal{O}_x) = \dim_{\mathbb{C}}(R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})_x)$ と定義する。（$(R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}))_x = \varprojlim_{\substack{Z>0 \\ \mathrm{Supp}\, Z \subset \pi^{-1}(x)}} H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ だから、

$p_g(\mathcal{O}_x) = \sup(\dim_{\mathbb{C}} H^1(Z, \mathcal{O}_Z))$ となる。）.

(2) $p_a(\mathcal{O}_x)$ (arithmetic genus) の定義.

Z が $\mathrm{supp}(Z) \subset \pi^{-1}(x)$ なる cycle のとき、$p_a(Z) = \frac{Z^2 + KZ}{2} + 1$.
（K は $\tilde{X}$ の canonical bundle）で Z の arithmetic genus が定まる.

<u>定義</u> $\quad p_a(\mathcal{O}_x) = \sup_{\substack{Z>0 \\ \mathrm{supp}(Z) \subset \pi^{-1}(x)}} p_a(Z)$.

$KA_i = 2(p_a(A_i) - 1) - A_i^2$ で、$p_a(A_i)$, A_i^2 はグラフよりわかるから、KA_i はグラフよりわかる。ゆえに、$p_a(\mathcal{O}_x)$ はグラフから計算可能な、全く「算術的」な種数である。

(3) 更に、我々は §2.(7) で、"fundamental cycle" Z_0 を定義した。$p_a(Z_0)$ も 'genus' の候補者に採用しよう。これもグラフから決まる算術的な量である。（$p_a(Z_0) \geqq 0$ である。）

(4) Singularity (X, x) に対して resolution はたくさんあるから、上の3つの定義が resolution によらずに well-defined である事を云っておく必要がある。すべての resolution は minimal（最小な）resolution から、有限回の quadratic transform（一点を blow-up する事）によって得られるから、$\tilde{X}_1 \xrightarrow{\theta} \tilde{X}_2 \xrightarrow{\pi_2} X$ ($\pi_1 = \pi_2 \circ \theta$) の時、$\tilde{X}_1$ を用いて定義したものと、$\tilde{X}_2$ を用い

て定義したものが同じである事を示せば良い。以下の証明は容易である。（Wagreich [11] に書いてある。なお、$Z_0=\sum n_i A_i$ が $\tilde{X}_2$ の fundamental cycle, θ が $p\in Z_0$ を中心とする blow-up, p に於ける Z_0 の multiplicity が μ のとき、$\tilde{X}_1$ の fundamental cycle は $\tilde{Z}_0=\sum n_i\tilde{A}_i+\mu.E$ （$E=\theta^{-1}(p)$, $\tilde{A}_i=\overline{\theta^{-1}(A_i-p)}$.

★ $p_g(\mathcal{O}_X)\geqq p_a(\mathcal{O}_X)\geqq p_a(Z_0)$

（∵） $p_a(Z)=(1-\dim H^0(Z,\mathcal{O}_Z))+\dim H^1(Z,\mathcal{O}_Z)\leqq\dim H^1(Z,\mathcal{O}_Z)\leqq p_g(\mathcal{O}_X)$

（5） "genus 0" の場合は上の三つの "genus" は一致し、更にこの時この singularity はいろいろ "良い" 性質をもつ。

定理 B. （Artin [1], Storch [13], D. Kirby [5], Brieskorn [2], Tyurina [10]）

singularity (X, x) に関して次の性質は同値である。

(i) $p_g(\mathcal{O}_X)=0$

(ii) $p_a(\mathcal{O}_X)=0$

(iii) $p_a(Z_0)=0$

(iv) $\forall Z>0$, $\mathrm{Supp}(Z)\subset\pi^{-1}(x)$, $p_a(Z)\leqq 0$.

(v) $C(\mathcal{O}_X)$ は有限群 （$C(\mathcal{O}_X)$: $\mathcal{O}_X$ の divisor class group).

(vi) (X, x) の resolution は一点を中心とする blow-up を繰り返す事によって得られる。(Absolute isolatedness).

定義　この性質をもつ特異点を rational singularity という。

（6） 例 1. $f: X'\to X$ は finite, X', X は normal, $x'\in X'$, $f(x')=x$.
この時、$\mathcal{O}_{X'}$ が rational singularity (又は regular) $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_X$ も so.

例2. $\mathbb{C}^2$に作用する有限群Gに対し、$\mathbb{C}^2/G$のsingularityと同型(bihol.)なsingularityをquotient singularityという.

(i) quotient singularityはrational singularity.

(ii) (X,x)がquotient singularity $\Leftrightarrow$ $\pi_1(K)$は有限群. ([3])

quotient singularityはBrieskorn [3] に全部分類されている。

(7) ☆ $P_a(Z_0)=1 \Leftrightarrow P_a(\mathcal{O}_x)=1$ (Wagreich [11], Prop. 4.3).

(8) (X,x), (X',x')が同じresolutionのグラフをもち、更に$\pi^{-1}(x)\cong\pi'^{-1}(x')$ (analytic varietyとして) でも $p_g(\mathcal{O}_x)=p_g(\mathcal{O}_{x'})$とは限らない。 (後述の例参照).

§4. Multiplicity と fundamental cycle の関係.

$\mathcal{O}_x$の極大イデアルを$\mathfrak{m}_x$とする. ($\mathfrak{m}_x=\{f\in\mathcal{O}_x \mid f(x)=0\}$)

$H_x(n)=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{m}_x^n/\mathfrak{m}_x^{n+1}$ と定義すると、$n\gg 0$ のとき、

$$H_x(n)=a_0\binom{n+2}{2}-a_1\binom{n+1}{1}+a_2 \qquad (a_0,a_1,a_2\in\mathbb{Z})$$

と書ける事が知られている。このときa_0を$\mathcal{O}_x$のmultiplicity (重複度) と呼び、$\mu(\mathcal{O}_x)$と書く。$X=V(f)\subset\underset{x=0}{\mathbb{C}^3}$のときは、$\mu(\mathcal{O}_x)=\mathrm{ord}_0(f)$である。 ($f=\sum a_{ijk}x^iy^jz^k$と書くとき、$\mathrm{ord}_0(f)=\min\{i+j+k \mid a_{ijk}\neq 0\}$.)

$\mathcal{O}_x$のfundamental cycleをZ_0とするとき、次の定理が成立する。

<u>定理C</u>. ($\pi : \tilde{X} \to X$ を resolution とする).

(i) $\mu(\mathcal{O}_x) \geqq -Z_0^2$.

(ii) $p_a(Z_0) = 0$ のとき、$\mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$.

(iii) $m_x \mathcal{O}_{\tilde{X}} \cong \mathcal{O}(-Z_1)$ (<u>divisor</u> Z_1 を定義する ideal) のとき、$Z_1 \geqq Z_0$ で、$\mu(\mathcal{O}_x) = -Z_1^2$. ($\therefore$ もし $Z_1 > Z_0$ なら、$-Z_1^2 > -Z_0^2$).

((i), (iii) は Wagreich [11], (ii) は Artin [1] 参照).

以上の結果によって、$-Z_0^2$ をグラフに対する multiplicity のようなものと考えても良いと云える。$\mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$ となる為のもう少し精密な条件が Wagreich [11] §5 に見られる。大雑把に云って、$-Z_0^2$ が "十分大きい" 時、$\mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$ である.

? "十分大きい" を精密に定式化できないか。例えば、$p_a(Z_0)$ のみで決まる数 N があって、$-Z_0^2 \geqq N \Rightarrow \mu(\mathcal{O}_x) = -Z_0^2$ とか。

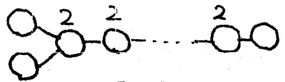
§5. グラフの分類.

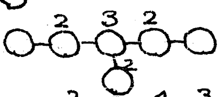
与えられた数 $p, n > 0$ に対して、$p_a(Z_0) = p$, $-Z_0^2 = n$ となるグラフをすべて示す事は(理論的には)可能である.

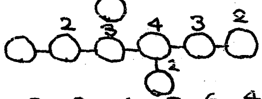
$-\!\bigcirc\!-\cdots-\!\bigcirc\!-$ の差を除けば、グラフは有限個である。以下にいくつかの例をならべる。(minimal resolution のグラフを示す。).

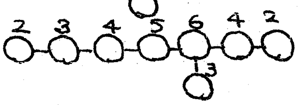
例1. $p_a(Z_0)=0$, $Z^2=-2$ のグラフは次の5種類.

(An) 

(Dn)  (n≧4この点).

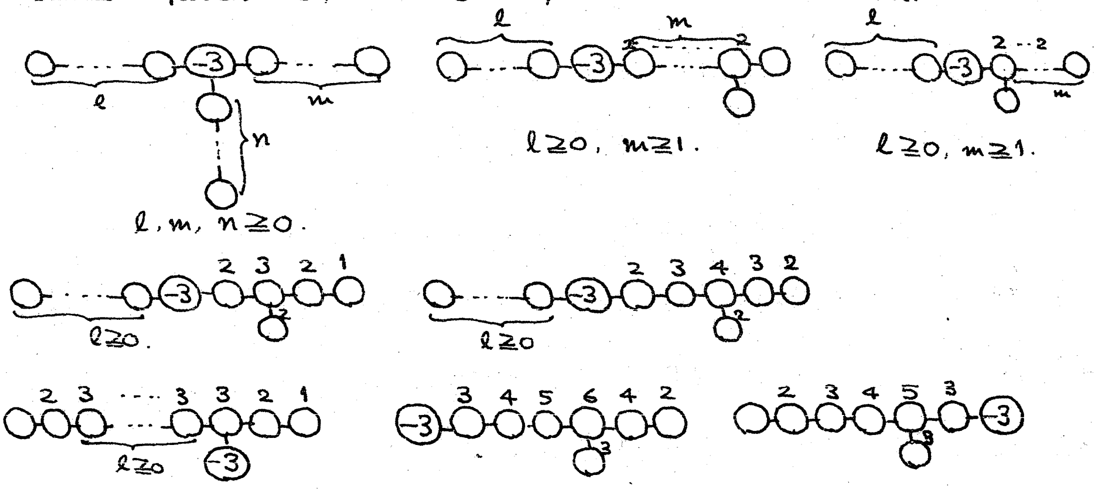
(E6) 

(E7) 

(E8) 

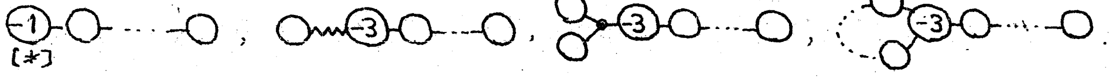
(○の上の数字は fundamental cycle にあらわれるその curve の multiplicity. $\overset{1}{\bigcirc}=\bigcirc$).

例2. $p_a(Z_0)=0$, $Z^2=-3$ のグラフは次の8種類.



($p_a(Z_0)=0$, $Z_0^2=-4$ なるグラフは —○···—○— だけの差を除くと 72 種類ある。).

例3. $p_a(Z_0)=1$, $Z_0^2=-1$ なるグラフは次の4種類.



[*] は $p_a(A_i)$ なる curve. 即ち、non-sing. elliptic、rational で、最も簡単な cusp 又は ordinary double point 1つをもつもの.
(Wagreich [11] には c. の型が欠落している.)

グラフの分類ができたとすると、次の問題は1つのグラフは"何種類"の（同型でない）$\mathcal{O}_x$ に対応するか？ という事であろう。Tyurina [9]は、$A=\bigcup A_i \cong A'=\bigcup A_i'$ なるとき、$\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{x'}$ が常に成立する為の条件を求めているがまだ完全とは云えない。しかし、rational singularity で、$-Z_0^2 \leqq 3$ のものに対しては1つのグラフに対して、1つの $\mathcal{O}_x$ しか対応しない事を示している。quotient singularity は同じ性質をもつ事が Brieskorn [3]に、また $\pi_1(K)$ が solvable であるグラフに対して Wagreich [12] がある。

☆ グラフの分類の具体的な計算方法について。

$Z < Z_0$ とすると、fundamental cycle の定義から、$\exists A_i,\ Z.A_i > 0$.

$\therefore\ p(Z+A_i) = p_a(Z) + p_a(A_i) + (Z.A_i) - 1 \geqq p_a(Z) + p_a(A_i)$

より、$p_a(Z_0)$ なる事と、$p_a(Z_0)$ に至る chain に次のような事が起る度に、$p_a(Z_0)$ が増して行く事がわかる。

1°. $p_a(A_i) \geqq 1$ なる A_i が存在する。

2°. $A_i.A_j \geqq 2$ なる i, j が存在する。（又は $Z.A_i \geqq 2$ となる。）

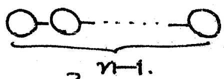
3°. $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \phi$ なる (i, j, k) が存在する。

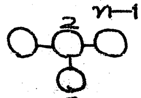
4°. グラフが cycle をもつ。

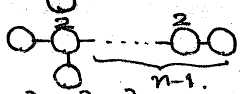
故に、例えば $p_a(Z_0)=0$ のときは、1°～4° は起らない。また、例えば $-Z_0^2=2 \Rightarrow KZ_0=0$. $A_i^2 \leqq -2$ より $K.A_i=0$ がわかる。あとは Kodaira [6] §6 と同様にすれば良い。

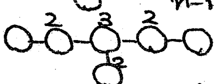
§6. 例.

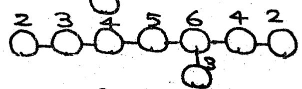
(1) Weighted homogeneous polynomial で定義された singularity のグラフは、Orlik-Wagreich [8] で計算方法が示されている。グラフは星型（一つの頂点から何本かの直線がのびている形）である。実際に計算してみると色々な面白い図形があらわれる。（[C]は $x^2-y^3=0$ の cusp をもつ rational curve をあらわす）.

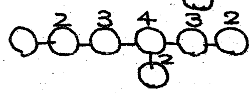
$x^2+y^2+z^n=0$  $p_a(Z_0)=0,\ Z_0^2=-2.$

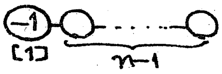
$x^2+y^3+z^3=0$  $p_a(Z_0)=0,\ Z_0^2=-2.$

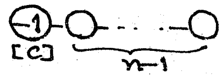
$x^2+y(z^2+y^n)=0$  $p_a(Z_0)=0,\ Z_0^2=-2.$

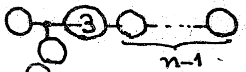
$x^2+y^3+z^4=0$  $p_a(Z_0)=0,\ Z_0^2=-2.$

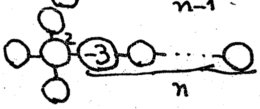
$x^2+y^3+z^5=0$  $p_a(Z_0)=0,\ Z_0^2=-2.$

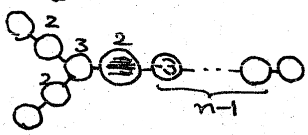
$x^2+y(y^2+z^3)=0$  $p_a(Z_0)=0,\ Z_0^2=-2$

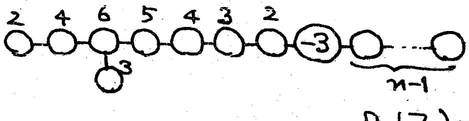
$x^2+y^3+z^{6n}=0$  $p_a(Z_0)=1,\ Z_0^2=-1.$

$x^2+y^3+z^{6n+1}=0$  $p_a(Z_0)=1,\ Z_0^2=-1.$

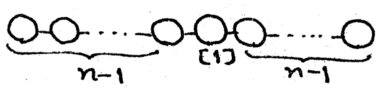
$x^2+y^3+z^{6n+2}=0$  $p_a(Z_0)=1,\ Z_0^2=-1.$

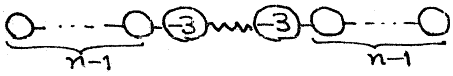
$x^2+y^3+z^{6n+3}=0$  $p_a(Z_0)=1,\ Z_0^2=-1.$

$x^2+y^3+z^{6n+4}=0$  $p_a(Z_0)=1,\ Z_0^2=-1.$

$x^2+y^3+z^{6n+5}=0$ 

$p_a(Z_0)=1,\ Z_0^2=-1.$

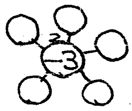
$x^2+y^4+z^{4n}=0$  $p_a(Z_0)=1;\ Z_0^2=-2.$

$x^2+y^4+z^{4n+1}=0$ 

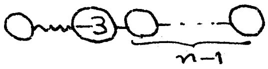
$p_a(Z_0)=1$, $Z_0^2=-2$.

$x^p+y^q+z^{pq}=0$ $\quad$ -1 $\left[\frac{(p-1)(q-1)}{2}\right]$ $\quad$ (但し, $(p,q)=1$) $\quad$ $p_a(Z_0)=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$, $Z_0^2=-1$.

$x^p+y^q+z^{pq+1}=0$ $\quad$ -1 $\left[\begin{array}{l} x^p-y^q=0 \text{ の cusp を持つ} \\ \text{rational curve} \end{array}\right]$ $\quad$ (但し, $(p,q)=1$) $\quad$ $p_a(Z_0)=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$, $Z_0^2=-1$.

$x^2+y^5+z^5=0$ 

$p_a(Z_0)=1$, $Z_0^2=-2$.

$x^2+y^3+yz^{4n+1}=0$ 

$p_a(Z_0)=1$, $Z_0^2=-1$.

(2) weighted ~~ps~~ homogeneous でない場合、埋め込み次元が高い場合. (但し、与えられた elliptic curve の $\wp$-函数に対し、$\wp'^2=4\wp^3-g_2\wp+g_3$)

$-n$ $\quad$ $\{z_0/z_1=z_1/z_2=\cdots=z_{n-1}/z_n\}\subset\mathbb{C}^{n+1}$.

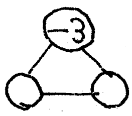
-3 [1] $\quad$ $\{x^2z-4y^3-g_2yz^2-g_3z^3=0\}\subset\mathbb{C}^3$

-4 [1] $\quad$ $\left\{\begin{array}{l} z_2^2-4z_1z_3-g_2z_0z_1-g_3z_0^2=0 \\ z_1^2-z_0z_3=0 \end{array}\right\}\subset\mathbb{C}^4$

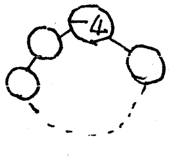
-5 [1] $\quad$ $\left\{\begin{array}{l} z_1^2-z_0z_3=0 \\ z_2z_4-4z_3^2-g_2z_0z_3-g_3z_0z_1=0 \\ z_1z_2-z_0z_4=0 \\ z_2^2-4z_1z_3-g_2z_0z_1-g_3z_0^2=0 \\ z_1z_4-z_2z_3=0 \end{array}\right\}\subset\mathbb{C}^5$.

(-6 [1], -7 [1], … についても時間さえかければ計算できる … [12])

$x^2+y^3-3yz^4+yz^5+2z^6-z^7=0$.



$z^2-(x+y^2)(x^2+y^7)=0$.



$z^2+x^3y+x^2y^2+ty^n=0$ $\quad$ $n\geq 5$, 頂点の数 $n-4$ コ.

(3) $p_a(\mathcal{O}_X) > p_a(Z_0)$ なるグラフ. $\underset{[3]}{-1}$ に於て、

$p_a(Z_0)=3 < p_a(2Z_0)=4=p_a(\mathcal{O}_X)$ (こんな例はいくらでも作れる。).

(4) $p_g(\mathcal{O}_X) > p_a(\mathcal{O}_X)$ なる例. (Wagreich [11])

1°. $\underset{[g]}{-n}$ で、$-g \geqq -n \geqq 2-2g$ とすると、$p_g(\mathcal{O}_X)$ は、$3g-n-1$ と g の間のすべての値をとらせる事ができる。$p_a(\mathcal{O}_X)=g$.

2°. $\bigcirc - \underset{[1]}{\overset{A_1}{\bigcirc}} - \bigcirc$ で、$2=p_g(\mathcal{O}_X)=\dim H^1(\mathcal{O}_{Z_0+A_1}) > p_a(\mathcal{O}_X)=1$.

§6. あとがき.

Singularity の genus を正当化する材料は今のところ、genus 0 を除いて余りないように思われる。Kodaira [6] の §7 以下に対応する事は云えないだろうか? また、グラフを与えた時、そのグラフをもつ singularity を特徴づける事もまだ一般には出来ていないようだ。問題は事欠かないが、解けるかどうか?

References.

[L] Laufer: Normal 2-dimensional singularities. (Princeton, 1971).

[1]. Artin: On isolated rational singularities of surfaces.

Amer. J. 88 ('66) 129~136.

[2] Brieskorn : Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen. Math. Ann. 166 ('66) 76~102.

[3] Brieskorn : Rational Singularitäten komplexen Flächen. Invention 4 ('68) 336~58.

[4] Hirzebruch 他 : Quadratic forms and differential manifolds. Dekker 4 ('71).

[5] D. Kirby : The structure of an isolated multiple point of a surface. I, II, III. Proc. London Math. Soc. 4 ('56)

[6] K. Kodaira : On compact analytic surfaces II. Annals of math. 77 ('63)

[7] Mumford : The topology of normal singularities of an algebraic surface. Publ. I.HES. 9 ('61)

[8] Orlik-Wagreich : Isolated singularities with $\mathbb{C}^*$-action. Annals of Math. 93 ('71) 205~228.

[9] G.N. Tyurina : On the tautness of rationally contractible curves on a surface. Izv. 2 ('68) 907~34.

[10] ———— : Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points. Func. anal. & its app. 2 ('68).

[11] Wagreich : Elliptic singularities of surfaces.

Amer. J. 92 ('70) 419 ~ 454.

[12] —— : Singularities of complex surfaces with solvable local fundamental groups. Topology 11 ('72) 51 ~ 72.

[13] Storch : Fastfaktorielle Ringe. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster ('67).