数理解析研究所講究録
170 巻 1973 年 24-35

Projective hypersurfaces について

東大理. 岡 睦雄

§1 入門

特異点をもたない hypersurface $H \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ はその isotopy class まで、次数 d と n のみで完全に、決定される([5])。ここでは、孤立特異点を何個か持つ hyperface V の cohomology ring $H^*(V;\mathbb{Q})$ に point をしぼって、その構造をしらべることにする。$f(z_0,\dots,z_{n+1})$ を d 次斉次多項式で、$V=f^{-1}(0)\subset \mathbb{C}P^{n+1}$ とする。$\Sigma V=\{P_1,\dots,P_\rho\}$ を V の singular point とする。必要なら適当な、座標変換をして、$\Sigma V\subset U_0=\{[z_0,\dots,z_{n+1}]\in\mathbb{C}P^{n+1}\mid z_0\neq 0\}$ と考えられる。

§2. Euler number, characteristic polynomials 及び zeta-函数

F を $\mathbb{C}^{n+2}$ の hypersurface で、$f^{-1}(1)$ で定義する。F は f で原点に定義される Milnor fibering:

(*) $f/|f|: S^{2n+3}-K \longrightarrow S^1 \quad (K=f^{-1}(0)\cap S^{2n+3})$

の fiber に diffeomorphic で、この fibering の

自然な connection による lifted diffeomorphism は $h: F \longrightarrow F$, $h(z_0,\dots,z_{n+1})=(z_0\exp\frac{2\pi i}{d},\dots,z_{n+1}\exp\frac{2\pi i}{d})$ で定義される。明らかに, $h^d=id$. 一般に differential manifold N とその上の periodic map $h: N\longrightarrow N$ ($h^d=id$) が与えられた時, h の zeta 函数を $\zeta(t)=\exp\sum_{j=1}^{\infty}\chi_j t^j/j$ (ここで, χ_j = Euler number of $Fix(h^j)$) で定義する。又 j-th characteristic polynomial $P_j(t)$ は $t\cdot h_* - I_*: H_j(N;Q)\longrightarrow H_j(N;Q)$ の行列式で定義する。$\zeta(t)$ と $P_j(t)$ は次の等式を満している。([3])

$$\zeta(t)= P_0(t)^{-1}P_1(t)P_2(t)^{-1}\cdots P_n(t)^{\pm 1} \quad\cdots(A)$$

以下 $H^*(N)$, $H_*(N)$ は Q 係数とする。元にもどって, $h: F\to F$ の zeta 函数は, 容易な計算によって,

$$\zeta(t)=(1-t^d)^{-\frac{\chi(F)}{d}} \quad\cdots\cdots(B)$$

今 α_j を $P_j(t)$ の $(t-1)$ 多重度とする (=rank of Kernel $h_*-I_*: H_j(F)\to H_j(F)$). 我々の場合, $\alpha_j=0$ ($j\leq n-1$) は容易に示される (cf Th.2 の Corollary 4). 従って (A), (B) より

Proposition 1. $\frac{\chi(F)}{d}= 1+(-1)^n(\alpha_n-\alpha_{n+1})$

V 及び F の Euler 標数の間には次の等式が成立する.

Lemma 1. $\chi(V)=(n+2)-\frac{\chi(F)}{d}$

証明：（水谷忠良氏の idea）$(\mathbb{C}P^{n+1}, V)$ を三角分割して（[2]），N を V の Regular neighborhood とします。F は明らかに $\mathbb{C}P^{n+1}-V$ 上の d-fold covering ですから，$\chi(F) = d\cdot\chi(\mathbb{C}P^{n+1}-V)$．一方 Euler 標数に関する和公式を使って，

$$\chi(\mathbb{C}P^{n+1}) = \chi(\mathbb{C}P^{n+1}-V) + \chi(V) - \chi(\partial N)$$
$$= \chi(\mathbb{C}P^{n+1}-V) + \chi(V)$$

従って，$\chi(V) = (n+2) - \dfrac{\chi(F)}{d}$ （終）

Lemma 2. $K = f^{-1}(0)\cap S^{2n+3}$ とすると，$H_*(K)$ は次の様になる。

$$\begin{cases} H_n(K) = \alpha_{n+1}Q, \quad H_{n+1}(K) = (\alpha_{n+1}+\alpha_n)Q \\ H_{n+2}(K) = \alpha_n Q, \quad H_{2n+1}(K) = Q \\ \widetilde{H_j}(K) = 0 \quad (\text{他}) \end{cases}$$

証明：(*) の Wang sequence

$$\cdots \to H_{j+1}(S^{2n+3}-K) \to H_j(F) \to H_j(F) \to H_j(S^{2n+3}-K) \to \cdots$$

と，Alexander duality $\widetilde{H^j}(K) = \widetilde{H}_{2n+2-j}(S^{2n+3}-K)$ より明白。（終）

さて，以上の準備の元で，$H^*(V)$ は次の様になる。

定理 1. (i) (n: odd)

$$\begin{cases} H^0(V) = H^2(V) = H^4(V) = \cdots = H^{n-1}(V) = Q \\ H^n(V) = \alpha_{n+1}Q, \quad H^{n+1}(V) = (\alpha_n+1)Q \\ H^{n+3}(V) = H^{n+5}(V) = \cdots = H^{2n}(V) = Q \\ H^{2j+1}(V) = 0 \quad (2j+1 \neq n+1) \end{cases}$$

(ii) (n: even)
$$\begin{cases} H^0(V)=H^2(V)=\cdots=H^{n-2}(V)=Q \\ H^n(V)=(\alpha_{n+1}+1)Q, \quad H^{n+1}(V)=\alpha_n Q \\ H^{n+2}(V)=H^{n+4}(V)=\cdots=H^{2n}(V)=Q \\ H^{2j+1}(V)=0 \quad (j\neq n+1) \end{cases}$$

証明: Hopf bundle $\pi: S^{2n+3}\longrightarrow \mathbb{C}P^{n+1}$ 及びその制限 $\pi: K\longrightarrow V$ を考えて, 次の2つの Gysin sequence を得る。

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^{j+1}(K) \arrow[r] & H^j(V) \arrow[r, "\cdot\tau"] & H^{j+2}(V) \arrow[r] & H^{j+2}(K) \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^{j+1}(S^{2n+3}) \arrow[r] \arrow[u] & H^j(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[r, "\cdot t"] \arrow[u] & H^{j+2}(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[r] \arrow[u] & H^{j+2}(S^{2n+3}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \end{tikzcd} \qquad \cdots (G)$$

ここで, t は Hopf bundle の Euler class $\in H^2(\mathbb{C}P^{n+1})$ τ はその制限. j に関する帰納法で, 次の diagram は可換な同型を与える: $(j\leq n-3)$

$$\begin{tikzcd} H^j(V) \arrow[r, "\cdot\tau", "\sim"'] & H^{j+2}(V) \\ H^j(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[r, "\sim", "\cdot t"'] \arrow[u, "\sim"'] & H^{j+2}(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd} \qquad \cdots (G_1)$$

一方 τ^n は V の fundamental cocycle の d 倍である事が知られているから, j に関して下向きの帰納で, (G_1) は $j\geq n+2$ でも成立する. 故に (G) は次様になる:

1) n: odd

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^n(V) \arrow[r] & H^n(K) \arrow[r] & H^{n-1}(V) \arrow[r, "\cdot\tau"] & H^{n+1}(V) \arrow[r, "j"] & H^{n+1}(K) \arrow[r] & H^n(V) \arrow[r] & 0 \\ & & & H^{n-1}(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[r, "\cdot t", "\sim"'] \arrow[u, "\sim"'] & H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[u] & & & \end{tikzcd}$$

$H^{n-1}(V) \xrightarrow{\cdot\tau} H^{n+1}(V)$ が injection である事を考えれば，

$H^n(V) \cong H^n(K)$,　$H^{n+1}(V) \cong \mathrm{Im}\,\tau \oplus \mathrm{Ker}\, j \cong (\alpha_n+1)\,Q$

2)　n: even

$$0 \to H^{n-2}(V) \xrightarrow{\cdot\tau} H^n(V) \to H^n(K) \to 0$$

$$0 \to H^{n+1}(V) \to H^{n+1}(K) \to H^n(V) \xrightarrow{\cdot\tau} H^{n+2}(V) \to H^{n+2}(K) \to H^{n+1}(V) \to 0$$

同様に，$H^n(V) = (\alpha_{n+1}+1)\,Q$,　$H^{n+1}(V) = \alpha_n\,Q$　Q.E.D.

Corollary 1. 環としての $H^*(V:Q)$ の構造は

$$H^*(V) \cong Q[\tau, x_1, \dots, x_{\alpha_{n+1}}, y_1, \dots, y_{\alpha_n}]/\sim$$

ここで，$\tau \in H^2(V)$, $x_j \in H^n(V)$, $y_k \in H^{n+1}(V)$ で，$\sim$ は

$\tau^{n+1} = 0$,　$\tau\cdot x_j = 0$　$(j = 1, \dots, \alpha_{n+1})$,　$\tau\cdot y_k = 0$　$(k = 1, \dots, \alpha_n)$

$x_j\, y_k = 0$.　$y_j \cdot y_k = 0$,　$x_i \cdot x_j = a_{ij}\,\tau^n$　$(a_{ij} \in Q)$).

(n: odd なら　$a_{ij} = -a_{ji}$)

注意　① Proposition 1 は全く一般に成立する.

② Theorem も全く一般に成立する．すなわち，

α_j を rank of kernel: $h_* - I_* : H_j(F) \to H_j(F)$ とすると，

rank $H^{n+j}(V) = \alpha_{n+1-j} + \varepsilon(n+j)$　ここで，$\varepsilon(n+j)$ は

$n+j$ は偶数なら 1, ~~奇数なら~~ 0 をとる．環構造も同様。

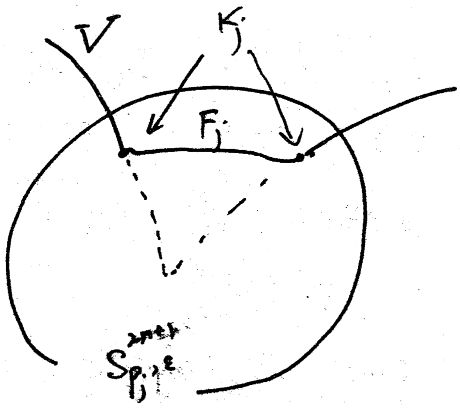
~~詳細は[6]をみられたい.~~ (⇒ §4 or [6]).

§3. Topological resolutions

M を微分可能多様体，π を M から V への連続写像を

する。$\{\pi : M \to V\}$ が V の topological resolution であるとは，(i) π は proper (ii) surjection (iii) $M - \pi^{-1}(\Sigma V) \xrightarrow{\pi} V - \Sigma V$ は diffeomorphism である時を言う。§1 と同じ仮定の下で，P_j を中心とする Milnor fibering を考える。ε を小さく選んで，$K_j = g^{-1}(0) \cap S^{2n+1}_{P_j,\varepsilon}$，$F_j = \{g > 0\} \cap S^{2n+1}_{P_j,\varepsilon}$ とする．$(j = 1, 2, \cdots, \rho)$

X^d を $\mathbb{C}P^{n+1}$ の中の特異点を持たぬ d 次の hypersurface とする．その様なものは，微分同型を除いて，一意に決定される．([5])



定理 2．次を満す resolution $\pi : X^d \to V$ が存在する．$\forall \delta \le \varepsilon$ に対して，$N_\delta(P_j)$ を $V \cap D^{2n+2}_{P_j,\delta}$ とすると，$\pi^{-1}(N_\delta(P_j))$ は $\bar{F}_j$ に diffeomorphic であって，次の図式は homotopy の意味で可換．

$$\begin{tikzcd} X^d \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "i"'] & V \arrow[d, "j"] \\ & \mathbb{C}P^{n+1} \end{tikzcd} \qquad (i, j : \text{inclusions})$$

補題 2．次の条件をみたす family $\{f(z,t)\}_{t \in U}$ がある．(0) U は $0 \in \mathbb{C}$ を含む近傍．(i) $f(z,0) = f(z)$ (ii) $f(z,t)$ は任意の t について，d 次斉次多項式で，$t \neq 0$ なら $\mathbb{C}P^{n+1}$

の non-singular hypersurface を定義する．(ii) $A=\{(z,t)\in \mathbb{C}P^{n+1}\times U \mid \frac{\partial f}{\partial z_j}(z,t)=0,\ j=1,2,\dots,n+1\}\cap U_0$ は $(P_j,0)$ で孤立．しかも $\exists\varepsilon>0$, $\forall t$ に対して，$S^{2n+1}_{P_j,\varepsilon}$ と $V_t=\{z\in\mathbb{C}P^{n+1}\mid f(z,t)=0\}$ が transverse．

証明．$g(z_1,\dots,z_{n+1})=f(1,z_1,\dots,z_{n+1})$ とすると，代数的集合上の多項式函数は有限個の critical values しか持たないので，$\exists\delta>0$，$D^2_{3\delta}$ の中の critical value は 0 だけとできる．$f(z,t)\equiv f(z)+tz_0^d$ と定義する．$(t\in D^2_{\delta})$．(0),(i) は明らか．(ii)：$U_0=\{z_0\neq 0\}\subset\mathbb{C}P^{n+1}$ でのみ check すれば良い．$V\left(\frac{\partial f(z,t)}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial f(z,t)}{\partial z_{n+1}}, f(z,t)\right)\cap U_0=V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(\ ),\dots,\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(\ ),\ f+t=0\right)\cap\{z_0=1\}\subset\mathbb{C}^{n+1}$．故に，$\delta$ に関する仮定より，上の集合は $t=0$ でのみ non-empty．(iii)：全く同様である．ε は $g^{-1}(0)$ と $S^{2n+1}_{P_j,\varepsilon}$ が transverse になる様にとって，δ_1 を $g^{-1}(\eta)$ と $S^{2n+1}_{P_j,\varepsilon}$ が $|\eta|<2\delta_1$ なら transverse になる様にとれば，あらためて，$f(z,t)$ を $D^2_{\delta_1}$ に制限すればよい．(終)

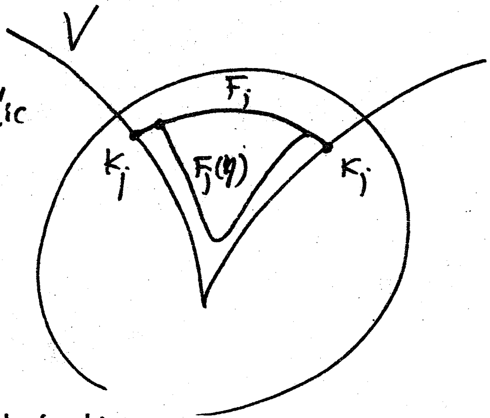
定理2の証明：上の deformation $f(z,t)$ を使って，$L=\{(z,t)\in\mathbb{C}P^{n+1}\times[0,\delta_1]\mid f(z,t)=0\}\subset\mathbb{C}P^{n+1}\times[0,\delta_1]$ を考える．L は $\{t=0\}$ に有限個の特異点をもつ，diff. manifold である．$\pi_1: L\longrightarrow[0,\delta]$ を $\pi_1(z,t)=t$ で定義する．明らかに，$\pi_1^{-1}(0)=V$ で，$\pi_1^{-1}(t)\cong X^d$ $(t\neq 0)$ π_1 は $L-\Sigma V$ 上で non-degenerate であるから，そこで，

π_1 の connection vector field v を作ると明らかに，$t \neq 0$ で，v は積分可能．h_t を v の one-parameter group とする．$h_t : \pi_1^{-1}(\delta_1) \triangleq X^d \longrightarrow \pi_1^{-1}(t) \quad (t \neq 0)$．さて．

$$\pi : X^d \longrightarrow \pi_1^{-1}(0) = V$$

を $\quad \pi(z) = \lim_{t \to +0} h_t(z) \qquad \left(z \in \pi_1^{-1}(\delta_1)\right)$ で定義する．ΣV は L の中で，孤立しているので，π は連続で，$\pi | X^d - \pi^{-1}(\Sigma V) \longrightarrow V - \Sigma V$ は diffeomorphism であることは明らか．最後の部分の証明の為に次の様な manifold $\tilde{V}$ を考える．η を十分小さくとって，$F_j(\eta) = g^{-1}(\eta) \cap D_{j,\varepsilon}^{2n+2}$ とする．$F_j(\eta)$ は $\overline{F_j}$ に diffeomorphic．$(\partial F_j(\eta) \triangleq K_j)$

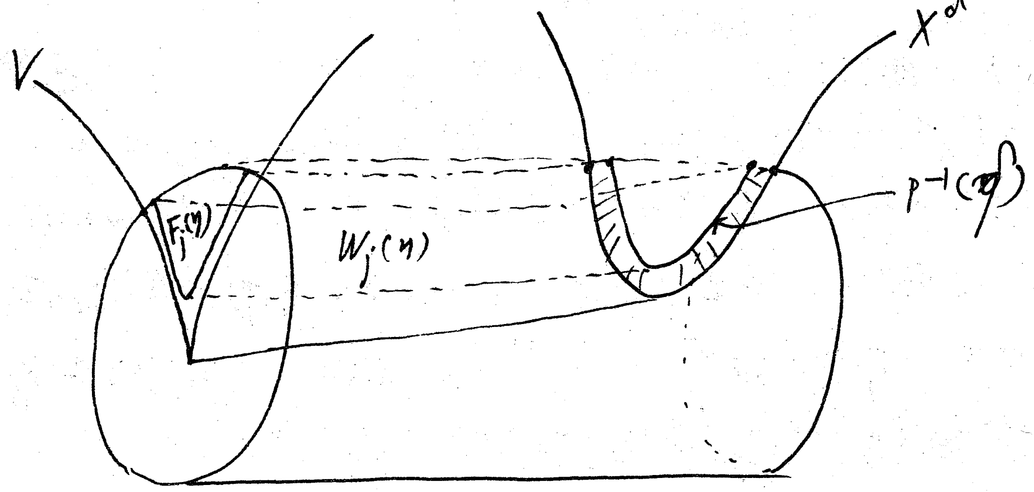
$$\tilde{V} \equiv \left(V - \bigcup_{j=1}^{\rho} V \cap \mathrm{Int}\, D_{j,\varepsilon}^{2n+1}\right) \bigcup_{K_j} F_j(\eta)$$



補題 3．$\tilde{V}$ は X^d に diffeomorphic である．

prof: $f(z,t)$ を補題 2 のものとします．$g(z_1, \ldots z_{n+1}, t) = f(1, z_1, \ldots, z_{n+1}, t)$ $= g(z) + t$ とする．η を小さくとれば，$X_{t,\eta} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid g(z,t) = \eta\}$ は $S_{j,\varepsilon}^{2n+1}$ と transverse．$(t \leq \delta_1)$．$W_j(\eta) \equiv \{(z,t) \in D_{j,\varepsilon}^{2n+2} \times [0, \delta_1] \mid g(z,t) = \eta\}$，$p(z,t) = t$ で，$p : W_j(\eta) \longrightarrow [0, \delta_1]$ を定義する．明らかに，p は non-degenerate で，proper mapping

であるから Ehresmann's fibering theorem によって,
$\exists\, \varphi_j : F_j(\eta) \longrightarrow p^{-1}(d')$ は diffeomorphism.
$p^{-1}(d')$ と $\pi_1^{-1}(d') \cap D_{j.\varepsilon} = X^d \cap D_{j.\varepsilon}$ が diffeo なる
事も明らかであるから, これらから求める微分同型
$\varphi : V \rightarrow X^d$ を得る.
(終)



Corollary 1. (Kato, M)

$$\chi(V) = \chi(X^d) - (-1)^n \sum_{j=1}^{p} \mu_j$$

$$= \frac{1}{d}\{(1-d)^{n+2} + (n+2)d - 1\} + (-1)^{n+1} \sum_j \mu_j$$

ここで, $\mu_j = \mathrm{rank}\, H_n(F_j)$ = multiplicity of g at P_j.

Corollary 2. $\chi(F) = 1 + (-1)^{n+1}(d-1)^{n+2} + (-1)^n \sum_{j=1}^{p} \mu_j d$

proof: 補題1 及び, Corollary 1.

Corollary 4. $\pi_*: H_j(X^d) \longrightarrow H_j(V)$

は $\left.\begin{matrix} j \leq n-1 \\ \text{or} \\ j \geq n+2 \end{matrix}\right\}$ で isomorphism, $j=n$ で onto, $j=n+1$: injection.

(証明): $(V-\bigcup_{j=1}^{\rho} V\cap D_{j,\varepsilon}, \bigcup_{j=1}^{\rho} V\cap D_{j,\varepsilon})$ と $(V-\bigcup_{j=1}^{\rho} V\cap D_{j,\varepsilon}, \bigcup_{j=1}^{\rho} \overline{F_j})$ の pairs に対する Mayer-Vietoris exact sequence と 補題3.

§4. General hypersurfaces.

$f(z_0,\dots,z_{n+1})$ を square-free な d 次 homogeneous polynomial として, $V=f^{-1}(0)\subset \mathbb{C}P^{n+1}$, $F=f^{-1}(1)\subset \mathbb{C}^{n+2}$, $K=f^{-1}(0)\cap S^{2n+3}$ とする. $P_j(t)$ を f の j-th characteristic polynomial とする. α_j を divisor $P_j(t)$ の $\langle 1\rangle$ の係数 (= rank of kernel: $h_*-I_*: H_j(F)\longrightarrow H_j(F)$) とする. その時 Th. 1 は次の様に拡張される.

Theorem 3. $\operatorname{rank} H^{n+j}(V) = \alpha_{n+1-j} + \varepsilon(n+j)$

ここで; $\varepsilon(n+j) = \begin{cases} 1 & n+j: \text{even} \\ 0 & n+j: \text{odd} \end{cases}$

更に ring としては, 適当な base $x_1^{(n+j)},\dots,x_{\alpha_{n+1-j}}^{(n+j)} \in H^{n+j}(V)$ と $\tau\in H^2(V)$ (Euler class of Hopf fibering) を使って, 次の様に表される.

$$H^*(V) \cong Q[\tau, x_1^{(n)}, \ldots, x_{\alpha_{n+1}}^{(n)}; \cdots; x_1^{(2n)}, \ldots, x_{\alpha_1}^{(2n)}]/\sim$$

ここで, $\tau \cdot x_k^{(n+j)} = 0 \ (\forall j, \forall k)$, $x_k^{(n+j)} \cdot x_s^{(n+l)} = 0$ $(\forall (j, l) \neq (0,0);\ \forall k, \forall s)$ $x_j^{(n)} \cdot x_k^{(n)} = a_{j\cdot k}\tau^n + \sum_l b_{j\cdot k}^l x_l^{(2n)}$, $Q[\ ]/\sim$ は. n が odd のとき, 非可換で; $x_j^{(n)} \cdot x_k^{(n)} = - x_k^{(n)} \cdot x_j^{(n)}$ を示す.

(証明) F には $\mathbb{Z}_d$ が, lifted diffeomorphism $h: F \to F$ $(z_0, \ldots, z_{n+1}) \mapsto (z_0 \exp\frac{2\pi i}{d}, \ldots, z_{n+1} \exp\frac{2\pi i}{d})$ で, free に operate している. 故に Borel によって.

$$H^j(F/\mathbb{Z}_d) = H^j(\mathbb{C}P^{n+1} - V) \cong [H^j(F)]^{\mathbb{Z}_d}$$

$$= \mathrm{Kernel}\{(h_* - I_*): H^j(F) \to H^j(F)\}$$

$$\cong \alpha_j Q$$

故に, $(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}P^{n+1} - V)$ に関する exact sequence (homology) より.

$$H^{n+j}(V) \underset{\text{duality}}{\cong} H_{n+2-j}(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}P^{n+1} - V)$$

$$\cong (\alpha_{n+1-j} + \varepsilon(n+j))\, Q$$

又. ring の構造と. $K \xrightarrow{S^1} V$ の Gysin sequence を使って, 容易に示される. 詳細は. [6] を見よ。

文 献

[1] M. Kato : Euler-Poincaré characteristics of complex hypersurfaces with isolated singularities

[2] S. Lojasiewicz : Triangulation of semi-analytic sets, Ann. of Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser, 3, 18, 1964

[3] J. Milnor : Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies, No 61, 1967.

[4] M. Oka : On the homotopy types of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials, to appear in Topology

[5] M. Oka: Notes on projective hypersurfaces.

[7]. M. Oka: Ring structures of projective hypersurfaces.