数理解析研究所講究録
170巻 1973年 2-23

「特異点の位相幾何学 案内」

東大 教養 加藤十吉

§0、序

特異点の位相幾何学と題しているのであるがどの様な背景の上に立っているかこゝで解説したい。著者の微力故，すべてを記すことは出来ないことをおことわりしておく。又，文献及びその内容については 渡辺敬一，岡 睦雄，森田茂之，水谷忠良 各氏の協力によって集めることができたので感謝の意を表したい。更に詳しくは諸氏の解説を見られたい。

§1．平面代数曲線の特異点の位相幾何学から Mumford の $x^2+y^3+z^5=0$ の研究へ．

既に，K. Brauner 1928 [7]，O. Zariski 1932 [87]，W. Burau 1932 [13]，1934 [14] そして J. E. Reeve 1954 [59] 等により結び目理論の観点から平面代数曲線の特異点の位相幾何学は深められていた。D. Mumford 1961 [52] による $x^2+y^3+z^5=0$ で定義されるアフ

イン複素超曲面 V の孤立特異点の研究がその方面の再興を促したと云える。即ち曲面 V は原点でのみ特異点を有し，V と原点中心の十分小さな球面 S^5 との切り口 $V \cap S = K$ は3次元の閉多様体となる。この K を孤立特異点の近傍多様体と呼べば，その位相的性質—— 例えば K が3次元ホモロジー球面であるということ —— と局所環の代数的性質—— $\mathbb{C}\{x, y, z\}/(x^2+y^3+z^5)$ が一意分解整域であるということ —— とが互に関連し合うこと，そして一般に normal 特異点の近傍多様体に対しては3次元ポアンカレ予想が成立すること等を特異点の blowing up を通して明らかにしたのである。

§2．曲面の rational 特異点とその blowing up の研究．

blowing up は代数幾何学の方面からは特異点研究の為の一つの本質的方法である。P. Du Val 1934 [16] により試みられ，曲面の孤立二重特異点の完全な分類が D. Kirby 1956 [34] により行われていた。Mumford の後，その様なグラフによる分類方法は M. Artin 1966 [4] により曲面の rational 特異点の研究へと著じるしく拡張される。（M. Artin 1962 [3]，G. N. Tyurina 1968 [74]，[75]，[76]；M. Schlessinger 1971 [62] 参照）．更に，一意分解整域の研究とも関連して多くの代数幾何学者，例えば，A.

Koestner 1967 [35], U. Storch 1967 [65], J. Lipman 1970 [41] 等 の寄与がある。

§3、商特異点の研究.

Mumford は，又，$\mathbb{C}\{x,y,z\}/(x^2+y^2+z^5)$ が双12面体群の複素平面 $\mathbb{C}^2$ への自然な作用による商空間として得られる曲面の孤立特異点の局所環であるという Klein の観察に数学者をひき戻し，かゝる特異点——商特異点——の研究が復活する。F. Hirzebruch 1966 [24], Hirzebruch–Mayer 1968 [25] は高次元の場合も含めて位相的研究を行っているが，曲面の rational 商特異点は E. Brieskorn 1968 [8] によって，近傍多様体に伴われる Seifert ファイバー束のすべての不変量を具体的に与えるという形で完全に分類された。更に，曲面の商特異点の研究は $\mathbb{C}^*$-作用を有するという条件のもとに P. Orlik – P. Wagreich 1971 [56], [57], P. Wagreich 1970 [79] へと拡張されている。

§4、超曲面の孤立特異点の研究——Brieskorn による exotic 球面の発見から Milnor ファイバー束による統一へ——.

特異点の位相幾何学の歴史で E. Brieskorn 1966 [10] による近傍多様体としての exotic 球面の発見程位相幾何学者を

驚嘆させたものはないだろう。彼は多項式

$$f(z_0, z_1, \cdots, z_n) = z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + \cdots + z_n^{a_n}$$

の零点として定義される複素n次元超曲面（Brieskorn variety）の特異点（原点）の近傍の研究を行った。多項式fの十分小さな正則値εの逆像と特異点のまわりの球体D^{2n+2}との切り口$f^{-1}(\varepsilon) \cap D = F$をとる。$\partial F \cong K = S \cap V = \partial D \cap V$（微分同相）に注意し，先づ$F$のホモトピー型をPham 1965 [58]の方法により決定し，高次元結び目理論に関連した洗練された微分位相幾何学の手法を駆使して近傍多様体KとFの位相を知るめやすを得たのであった。これはblowing upから離れても純粋に位相幾何学的方法で特異点の近傍の位相が計れることを教えてくれたのである。Milnor 1968 [47] は球面$\partial D = S^{2n+1}$と近傍多様体$V \cap S = K^{2n-1}$の対の位相（即ち，"結び目"）を考えるという点で古典的立場に立つが、実はEhresmann 1950 [17] のファイバー束

$$f | D \cap f^{-1}(S^1_\varepsilon) : D \cap f^{-1}(S^1_\varepsilon) \longrightarrow S^1_\varepsilon$$

をKのSでの補空間$S-K$に押し込めることを観察し，このファイバー束について研究を深めたのである。彼はもっと精密に，いかなる多項式写像$f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$に対しても十分小な球面$S^{2n+1}$に対して，$\dfrac{f}{|f|} : S - K \longrightarrow S^1$

が微分ファイバー束で，f の Ehresmann ファイバー束がこのファイバー束と同型になることを証明した．（Kはこの際，近傍多面体と呼ばれるべきである — 多様体でない — ）．このようにして，Milnor は Brieskorn の位相的方法を深めて一般の超曲面の特異点の研究を高次元の場合も含めてより具体的に Milnor ファイバー束の研究として統一した．

§5. 孤立特異点の Milnor ファイバー束.

孤立特異点のまわりの Milnor ファイバー束について次の諸点が Milnor により明らかにされた．（[47]）

(1). 特異点のまわりの球面 S^{2n+1} は近傍多様体 K で分岐した円周 S^1 上の分岐ファイバー束として捉えられる．

(2). Kは $(n-2)$-連結（孤立特異点でなくてもよい），Milnor ファイバー F^{2n} は n 次元有限CW-複体のホモトピー型を有する（孤立特異点でなくても良い）．とくに，Fは $(n-2)$-連結である．

(3). (2)よりFのホモトピー型は $H_n(F)$ の rank μ で決定されるが，この n 次元 Betti 数 μ は

$\mu=$（grad f の特異点のまわりの germ の局所写像度）

により与えられる．

(4). 特に平面曲線のとき，$K^1 \subset S^3$ は link で，その

連結成分の数をrとすれば，代数的不変量δとの間に

$$2\delta = \mu + r - 1$$

なる関係式が存在する。（δについてはJ. P. Serre [63] 参照）

(5). Brieskorn多項式，更には斉次多項式の佳い拡張概念としてweighted (quasi)斉次多項式の概念を提唱した。

かくて超曲面の特異点の研究はMilnorにより方法が統一されると同時にそこから数多くの興味深い問題が生ずることになった。（超曲面の場合を完全交叉の場合へ拡張できるが，それについてはHamm 1971 [18], [19] 参照）.

§6. 孤立特異点を有するweighted斉次多項式の研究及び超曲面の孤立特異点の研究.

weighted 斉次多項式の孤立特異点は原点のみである。そのMilnorファイバーFのμはOrlik-Milnor [49] により決定された。$f(z, w) = g(z) + h(w)$ という形の多項式に対してMilnorファイバーはgのそれと，hのそれのjoinのホモトピー型を有するというjoin定理もweighted斉次多項式に対し岡睦雄 [53] 及びThom-Sebastiani [73] により示された。Milnorファイバー束そのものの分類は岡睦雄 [54] で与えられている。weighted斉次多項式の特異点の位相分類にかゝわるこうした決定がすべてweightによってなされ

るという点がその佳い単純性を示唆している。weighted斉次多項式の一般多項式の中での解析的性格づけが斉藤恭司1971[60]により与えられたのも注目すべきだろう。

一般超曲面の孤立特異点に関しては，先づ，Lê Dũng Tráng [42]により μ の代数的性格づけが与えられた。Brieskorn 1970[12]はMilnorファイバー束のmonodromyの特性多項式が常に円分多項式の積となることを示しMilnorの問題を肯定的に解いた。Grothendieckのhypercohomologyの理論もこの方面で寄与することになる。(Milnor[47], p.72及び脚注参照)．又，Monodromy自体周期的ではないかという問題はA'Campo[1]により反例が示され否定的な解決が得られた。

§7. Milnorファイバー束の位相的再吟味 — 田村のspinnable構造 —.

多項式の特異点の研究は，そこで位相的方法が駆使される一方，その結果としてHirzebruch等による周期変換群の近傍多様体への作用の研究でそれが位相幾何学の佳い具体例を与えるという点でも注目される。その顕著な最近の例としてMilnorファイバー束，松江ファイバー束を通してS^5への位相同値だがPL同値でないinvolutionの具体的記述を与える本講究録における福原真二の結果を挙げることができる。し

かし，最近の B. Lawson 1971 [36] の 2^k+3 ($k \geq 1$) 次元球面に対する余次元1の foliation の存在証明で Milnor ファイバー束の有する佳い性質の真価が発揮されたといえる。田村一郎 1972 [68] による奇数次元球面の余次元1の foliation の構成は暗黙のうちに $S-K$ の Milnor ファイバー束を純粋に位相的再吟味を行い，S の spinnable 構造と捉え，精密化し，高次元結び目理論の観点から深く考察し得られたものといえるのではないだろうか．これにより余次元1の foliation の理論においても，田村の spinnable 構造 [69] の概念を通して Smale，Kervaire-Milnor 等により育まれた多様体の理論が十分に生かされるようになったのである。

spinnable 構造の概念は J. W. Alexander 1923 [2] の古典的結果を拡張するという形で H. E. Winkelnkemper [84], [85] により "open books" の名のもとに独立に研究され，とくに向きづけ可能な奇数次元閉多様体に対しその存在が示された。著者は孤立特異点の Milnor spinnable 構造の一般化と考えられる奇数次元 Alexander 多様体の単純 spinnable 構造の分類をそれに伴われる Seifert 形式の分類に帰着した。(本講究録及び [33] 参照)．ごく最近 Brieskorn type の場合の Milnor spinnable 構造の Seifert 形式は坂本幸一 (本講究録) によって計算された．水谷 明 (本講究録) による相対

*spinnable*構造は余次元1の*foliation*の構成を*spinnable*構造の存在から直接結びつけるものだけに重要な概念であろう。

§8. 商特異点の理論の再生.

Hirzebruch 1971 [26] は曲面の商特異点が*G-signature*定理の佳い応用の対象であり, いくつかの結果が整数論とのかゝわりを有していることを注目した。更に Serre [64] に刺激され*Hilbert modular*群の研究で*blowing up*を通していくつかの不変量(例えば商特異点の*signature*)を定義した。一方, [27]では*Brieskorn type*の*Milnor*ファイバーの*signature*を*Bott* [6]の結果にもとづいて決定している。(詳しくは Zagier [86]参照). 森田茂之[51]は高次元の場合にも商特異点の*signature*を定義することに成功した。(本講究録参照)。そこで森田は*blowing up*からいくつかの不変量を定義する時, その*well-defined*を示す際に安定概複素構造の概複素構造への還元を対応するバンドルの構造群の双対ホモトピー群の解析にもとづき手術のもとに行う方法を提供するが, これは*blowing up*を通しての位相的研究で代数位相幾何学が本質的寄与をなすことを示唆している。藤木明(本講究録)は3次元商特異点の*blowing up*の存在を示したが, その研究では新らしい位相的研究が要請されよう。

§9. Stratificationの理論

解析的集合の位相幾何学を行うに際して基礎となるのは三角分割の存在であると考えるのは自然であろう。
この方面の試みは多くの数学者によってなされてきたが手法のない時代を背景にしてあいまいな点が多かった。Whitney 1957 [81] は Stratificationの概念の導入によりかゝる解析的集合を開多様体に分割した。Borel-Haefliger [5] はこの概念を有効に使用し基本類の存在を証明した。三角分割については Lojasiewicz 1965 [43] により実 semi 解析集合という比較的広汎な対象に対してその存在が示された。(佐藤[61]参照). H. Whitney 1964 [82], 1965 [83] による Whitney stratification の概念の導入は Thom 1969 [72] (Mather 1970 [45], [46]) により stratified 集合へと精密化され、三角分割以上の内容(例えば Thom のイソトピー定理)を明らかにしてくれる。

§10. 解析的集合の位相幾何学

複素解析集合に対する Whitney stratification の存在は Whitney 自身 1964 [82] により与えられ、実解析集合に対するその存在は S. Lojasiewicz 1965 [44] により証明されている。Thom 1965 [71] (Milnor [48]) は実代数的集合の Betti 数のめやすを Whitney stratification の概念の使用によ

り計算した。D. Sullivan 1970 [66] は奇数次元の多様体成分を有するコンパクト Whitney stratified 集合のオイラー標数は零であることを示し，実解析集合の mod 2 局所オイラー標数が消えることを示して実解析集合に対し Stiefel – Whitney ホモロジー類を定義した。（Cheeger [15] 参照）．しかしながら stratified 集合をどのように位相幾何学するかという一般的方法を決定的に与えてくれる定理は今のところ得られていない。その候補として広中 [20] の resolution を位相幾何学的に解釈し，それに対応する定理を特異点のまわりの解析的集合の bordism 的性質を反映させながら位相幾何学的方法で証明する Sullivan 197■ [67] により示唆される方向がある。これに対しては著者 [31] が超曲面のときにのみ結果を得ているに過ぎない。

§11. 超曲面の場合

孤立特異点の局所的性質は Brieskorn – Milnor の方法で確実に捉えられる。そこで大域的性質が問題となる。先ず，著者は孤立特異点を有する超曲面の Euler 標数の計算を almost complex resolution を仲介に計算した。（[32]）．　岡 睦雄（本講究録）は projective 超曲面のオイラー標数ばかりではなくコホモロジー環の構造を完全に決定した。これは射影的

という制限はあるが一般の特異点の場合の綜合的成果といえる。松本－加藤（本講究録）のミルナーファイバーの連結性の特異点集合の次元からめやすを与える定理はMilnorファイバー束とstratificationの方法とを融合して得られているという点で興味深い。

§12. あとがき.

以上主に解析的集合にかゝわる特異点の位相幾何学を述べた。佐藤 肇（本講究録）による余次元2の多様体の埋蔵に関する特異点の理論，そしてfoliationはそれ自体特異点以上のものを含む筈の内容をもち，現在のところ可能であるspinnable構造のもとに捉えられる単純な内容を有する余次元1のfoliationに関する水谷 明（本講究録）の解説，又，degenerated fiberに関する浪川幸彦（本講究録）の結果等については諸氏の項で手際よく解説されるだろう。

結論としては，"この方面ではなにかが起りそうである"という予感と期待があることを記すにとどめる。

以下参考文献を記すが，各文献の参考文献には更に専門的文献紹介があるので詳しくはそれを参照されたい。

参考文献

[1] N. A'Campo, "Sur la monodromie", (to appear).

[2] J. W. Alexander, "A lemma on systems of (knotted) curves", Proc. Nat. Acad. Sciences, U.S.A. 9 (1923), 93–95.

[3] M. Artin, "Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces", Amer. J. Math. 84 (1962).

[4] ———, "On isolated rational singularity of surfaces", Amer. J. Math. 88 (1966), 129–136.

[5] A. Borel and A. Haefliger, L'homologie fundamentale d'un espace analytique, Bull. Soc. Math. France (1961).

[6] R. Bott, "Computation of Pontrjagin classes of $P^n(\mathbb{C})/G$, G : linear finite action", (unpublished).

[7] K. Brauner, "Zur Geometrie der Functionen zweier Komplexen Veränderlichen III, IV", Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), 8–54.

[8] E. Brieskorn, "Über die Auflösung gewissen Singularitäten von holomorphen Abbildungen", Math. Ann. 166 (1966), 76–102.

[9] ———, "Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorpher Abbildungen", Math. Ann. 178 (1968), 255–270.

[10] ————, "Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten", Inventiones Math. 2 (1966), 1~14.
[11] ————, "Rationale Singularitäten komplexer Flächen", Inventiones Math. 14(1968), 336-358.
[12] ————, "Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen", Manuscripta mathematica, 2 (1970), 103-161.
[13] W. Burau, "Kennzeichung der Schlauchknoten", Abh. Math. Sem. Hamburg 9(1932), 125-133.
[14] ————, 上と同じく 10 (1934), 285-397.
[15] J. Cheeger, "A combinatorial formula for Stiefel-Whitney classes", in "Topology of manifolds", Georgia, 1969.
[16] P. DuVal, "On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction", Proc. Cambridge Phil. Soc. 30(1934), 453-459.
[17] C. Ehresmann, "Les connexions infinitésimales dans un espace fibré differentiable", Colloque de Topologie, Brüssel (1950), 29-55.
[18] H. A. Hamm, "Locale topologische Eigenschaften komplexer Räums", Math. Ann. 191 (1971).
[19] ————, "Topology of isolated singularities of

complex spaces", Proceedings of Liverpool Singularities symposium II", Springer Notes 209 (1971), 213-217.

[20] 広中平祐, "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I", Ann. of Math. 79 (1964), 109-203.

[21] F. Hirzebruch, "The topology of normal singularities of an algebraic surface", Séminaire Bourbaki 15e année 1962/3, N. 250.

[22] ――――――, "Differentiable manifolds and quadratic forms", Berkeley (1962).

[23] ――――――, "Singularities and exotic spheres", Séminaire Bourbaki, 19e année 1966/67, No. 314.

[24] ――――――, "O(n)-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären, kuriose Involution", March 1960.

[25] ―――― and K. H. Mayer, "O(n)-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten", Springer Notes 57 (1968).

[26] ――――――, "Signature theorem, Reminiscence and recreation", Prospects in Mathematics, Ann. Math Study 70 (1971), 3-31.

[27] ――――――, "Pontrjagin classes of rational homology

manifolds and the signature of some affine hypersurfaces", Proceedings of Liverpool singularities symposium II, Springer Notes 209 (1971), 207-212.

[28] ——— and D. Zagier, "Applications of Atiyah-Singer G-signature theorem", (to appear in Springer Notes).

[29] ———, "The Hilbert modular group", (lecture notes) 東京大学 IMU 講義, (to appear in Enseign. Math.)

[30] ———, "The signature theorem for differentiable manifolds and some elementary number theory", (to appear, Geometry of Manifolds, 京大数解研講究録.

[31] M. Kato, "Topological resolution of singularitées", (to appear).

[32] ———, "Euler characteristics of complex projective hypersurfaces with isolated singularities", (to appear, Geometry of Manifolds, 京大数解研講究録.

[33] ———, "A classification of simple spinnable structures on Alexander manifolds", (in preparation).

[34] ~~———~~ D. Kirby, "The structure of an isolated multiple point of a surface, I, II, III", Proc. London Math. Soc. 6 (1956), 597-609; 7 (1957), 1-28.

[35] A. Koestner, "Lokale Darstellbarkeit eindimensionaler

normalen komplexen Räumen durch eine holomorphe Funktionen", Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster 35 (1967).

[36] B. Lawson, "Codimension-one foliations of spheres", Ann. of Math. 94 (1971), 494–503.

[37] J. Levine, "Polynomial invariants of knots of codimension two", Ann. of Math. 84 (1966), 537–554.

[38] ————, "Knot cobordism groups in codimension two", Comment. Math. Helv. 44 (1969), 229–244.

[39] ————, "Invariants of knot cobordism", Inventiones Math. 8 (1969), 98–110.

[40] ————, "An Algebraic classification of some knots in codimension two", Comment. Math. Helv. 45 (1970).

[41] J. Lipman, "Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization", Publ. I.H.E.S. 36 (1970), 195–279.

[42] Lê Dũng Tráng, "Singularités isolées des hypersurfaces complexes", Publication du centre de Math. de l'Ecole Polytechnique.

[43] S. Lojasiewicz, "Triangulation of semi analytic sets", Annali Scie. Norm. Sup. Pisa, Sc. Fis. Math.

Ser. 1964.

[44] ———, "Ensembles semi-analytiques": Centre Physique theor. de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1965, No. A66-765.

[45] J. N. Mather, "Notes on topological stabilities", (lecture notes), Harvard Univ (1970).

[46] ———, "Stratifications and mappings", 上と同じ.

[47] J. Milnor, "Singular points of complex hypersurfaces", Ann. Math. Study 61 (1968).

[48] ———, "On the Betti numbers of real varieties", Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 275-280.

[49] ——— and P. Orlik, "Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials", Topology 9 (1970), 385-393.

[50] 森田茂之, "Notes on the topology of analytic sets", (to appear, Geometry of Manifolds, 京大数解研講究録.

[51] ———, "Almost complex manifolds and Hirzebruch invariants for isolated singularities in complex spaces", (to appear).

[52] D. Mumford, "The topology of normal singularities

of an algebraic surface and a criterion for simplicity", Publ. I. H. E. S., Paris, 9 (1961).
[53] 岡 睦雄, On the homotopy type of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials" (to appear).
[54] ——, "Local deformation of polynomials with isolated singularities", (mimeographed).
[55] P. Orlik, "Weighted homogeneous polynomials and fundamental groups", Topology 9 (1970), 267–273.
[56] —— and P. Wagreich, "Isolated singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$-action", Ann. of Math. 93 (1971).
[57] —— and ——, "Singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$-action", Math. Ann. 193 (1971), 121–135.
[58] F. Pham, "Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des integrales", Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 333–367.
[59] J. E. Reeve, "A summary of results in the topological classification of plane algébroid singularities", Rendiconti Sem. Mat. Torino, 14 (1954/55), 159–187.
[60] 斉藤恭司, "Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen", Inventiones Math. 14 (1971), 123–142.
[61] K. Sato, "Local triangulation of real analytic varieties",

Osaka J. Math. 15 (1963).
[62] M. Schlessinger, "Rigidity of quotient singularities", Inventiónes Math. 14 (1971), 17–26.
[63] J. P. Serre, "Groupes algébraiques et corps de classes," Hermann, Paris, (1959).
[64] ――――――, "Cohomologie des groupes discrets," Ann. Math. Study 70 (1971), 77–169.
[65] U. Storch, "Factorieller Ringe," Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster 36 (1967).
[66] D. Sullivan, "Combinatorial invariants of analytic spaces", Proceedings of Liverpool singularities symposium I, Springer Notes 192 (1971), 165–168.
[67] ――――――, "Singularities in spaces", Proceedings of Liverpool singularities symposium II, Springer Notes 209 (1971) 196–206.
[68] 田村一郎, "Every odd dimensional homotopy sphere has a foliation of codimension one", Comment. Math. Helv. 47 (1972), 73–79.
[69] ――――, "Foliations and spinnable structures on manifolds", (to appear).
[70] ――――, "Foliations of total spaces of sphere bundles

over spheres, J. Math. Soc. Japan 24 (1972).
[71] R. Thom, "Sur l'homologie des variétés algébraiques réelles", Differential and combinatorial topology, Princeton Univ. Press (1965), 255-265.
[72] ———, "Ensembles et morphismes stratifiés", Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 240-284.
[73] ——— and Sebastiani, "Un résultat sur la monodromie", Inventiones Math. 13 (1971).
[74] G. N. Tyurina, "Topological properties of isolated singularities in complex spaces of codimension one", Izv. Akad. Nauk USSR 32 (1968), 605-620.
[75] ———, "The rigidity of rationally contractible curves on a surface", Izv. Akad. Nauk. USSR 32 (1968) 943-970.
[76] ———, "Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points", Funct. Analy. and its Appl. 2 (1968), 324-333.
[77] ———, "Locally semi-universal flat deformations of isolated singularities of complex spaces", Izv. Akad. Nauk. USSR 33 (1970), 1026-1058.
[78] ———, "Equations of singularities of flat

deformations of rational double points", Func. Anal. and its App. 4(1970), 77-83.
[79] P. Wagreich, "Elliptic singularities of surfaces", Amer. J. Math. 92(1970), 419-454.
[80] ———, "Singularities of complex surfaces with solvable local fundamental group", Topology 11 (1972)
[81] H. Whitney, "Elementary structure of real algebraic varieties", Ann. of Math. 66 (1957), 545-556.
[82] ———, "Tangents to an analytic variety", Ann. of Math. 81 (1964).
[83] ———, "Local properties of analytic sets", Differential and Combinatorial topology", Princeton Univ. Press (1965), 205-244.
[84] H. E. Winkelnkemper, "On equators of manifolds and the action of Θ^n", Ph. D. Thesis, Princeton Univ.
[85] ———, "Manifolds as open books", (to appear).
[86] D. Zagier, "Some problems in differential topology", Ph. D. Thesis, Oxford-Bonn (1971).
[87] O. Zariski, "On the topology of algebroid singularities", Amer. J. Math. 54 (1932), 453-465.