数理解析研究所講究録
171巻 1973年 191-196

ソリトンの安定性

早大理工　斉藤信彦，大山尚武　相沢洋二

§1．格子ソリトンの減速について

ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N} P_i^2 + \sum\left\{\frac{a}{b}\cdot e^{-b(x_i - x_{i+1} - D)} + a(x_i - x_{i+1} - D)\right\} \quad (1)$$

である一次元非線形格子系を考える。

正準変換によって $(p,q) \to (s,r)$，r．s で運動方程式を書くと，

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= a(e^{-br_n} - 1) \\ \dot{r}_n &= \frac{1}{m}(2s_n - s_{n-1} - s_{n+1}) \end{aligned} \quad (2)$$

となる．　ここで

$$\begin{aligned} s_n - s_{n+1} &= m\dot{x}_n = P_n \\ x_n - x_{n+1} &= r_n \end{aligned} \quad (3)$$

である．　この格子系には，特殊解（ソリトン）が存在する．

（M. Toda，1967）

1!.

$$r_n = -\frac{1}{b} \ln \{ 1 + \sinh^2\alpha \; \mathrm{sech}^2(\alpha n - \beta t) \}$$

$$s_n = -\frac{1}{b} \beta \cdot m \tanh(\alpha n - \beta t) \qquad (4)$$

但し $\beta = \sqrt{\frac{ab}{m}} \cdot \sinh \alpha$

これらのソリトン同士の衝突によっては，各ソリトンは崩れずに安定に運動をつづけることが知られている．

ここでは，ソリトンと，(4) の形で表わせない，非ソリトン的な解との相互作用によるソリトンの安定性を計算機シミュレーションから調らべる．(4)の形の解を $t=0$ で，$r_n(0)(\neq 0)$，$s_n(0)(\neq 0)$ とし，それに，わづかに摂動，$\Delta r_n(0)(\neq 0)$，$\Delta s_n(0)(=0)$ を加える．この初期状態から，運動方程式 (2) を数値的に解いて，ソリトンの速度変化を調らべる．これによると，いくつかの計算~~機~~結果から，ソリトンはゆっくり減速することが見られた．また摂動，$\Delta r_n(0)(\neq 0)$，$\Delta s_n(0)(=0)$ はそのままでソリトンの方向を逆にして，運動方程式を解いても，同様にソリトンの減速が見られた．これらの事から，ソリトンの減速はかなり一般的であろうと考えられる．

§2. Surface of Section の方法による格子ソリトンの大域的安定性

先に摂動によるソリトンの減速が見られることを指摘したが，しかし完全にソリトンが消滅するという結果は得られていない。この系の大域的性質を調べるために，自由度2の格子モデルについて，系の大域的安定性を，Surface of Section の方法で調べる。

運動方程式

$$m\ddot{x}_1 = a\{e^{-b(x_1-D)} - e^{-b(x_2-x_1-D)}\}$$
$$m\ddot{x}_2 = a\{e^{-b(x_2-x_1-D)} - e^{-b(x_3-x_2-D)}\} \quad (5)$$

を考える。$m = D = a = b = 1$ とし，さらにこの系が，ソリトン解 (3) をもち，$\alpha = 1$ と $\alpha = 4$ の場合を考える。このとき $t=0$ でソリトンの形は決って，したがって $x_1(0)$，$x_2(0)$，$x_3(0)$ もきまる。この x_3 を fix して，方程式 (5) を解く。$\alpha=1$，$\alpha=4$ とした結果，系のエネルギーは，

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2) + e^{-(x_1-1)} + e^{-(x_2-x_1-1)} + e^{-(x_3-x_2-1)} + (x_3-3) \quad (6)$$

として，$E \fallingdotseq 4.56$ $(\alpha=1)$，$E = 1485.4$ $(\alpha=4)$ となる。

このエネルギーを fix して，いくつかの初期条件から運動を追跡する．その運動の path が $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$ の空間内の $x_2 = \frac{2}{3}x_3(0)$ となる面（Surface of Section）を通過する $(\dot{x}_2 \geq 0)$ 瞬間の $(x_1, \dot{x}_1)$ の二次元写像（ポアンカレ写像）を考える。もし周期解を選べば，ポアンカレ写像は，不動点となる．さらに，運動がエルゴード的ならば $(x_1, \dot{x}_1)$ のエネルギー的に許された全領域に，ポアンカレ写像が広がってしまう．又逆に，エネルギー以外の保存量があれば，ポアンカレ写像は，規則的な曲線にのる．（不変曲線と呼ぶ．）

図1，図2 はそれぞれ $\alpha = 1$，$\alpha = 4$ に対するポアンカレ写像から得られた不変曲線群である．渦心点が二つあり，いずれも不動点である．又．$\dot{x}_1 > 0$，$x_1 > 0$ の領域にある不動点がソリトン解に対応する．他の不動点は，定在波としての周期解である．二つのポアンカレ写像の結果は非常に異っているが，トポロジカルな構造は変っていない．

2自由度系の格子系は，これまでのところ，大域的に安定であり，エネルギー以外の保存量が存在することが分る．さらに，ソリトンも又安定である．しかし，もっと大きなエネルギーのときに，振幅不安定性の生じる可能性もある．これらの事は今後，調らべる必要がある．

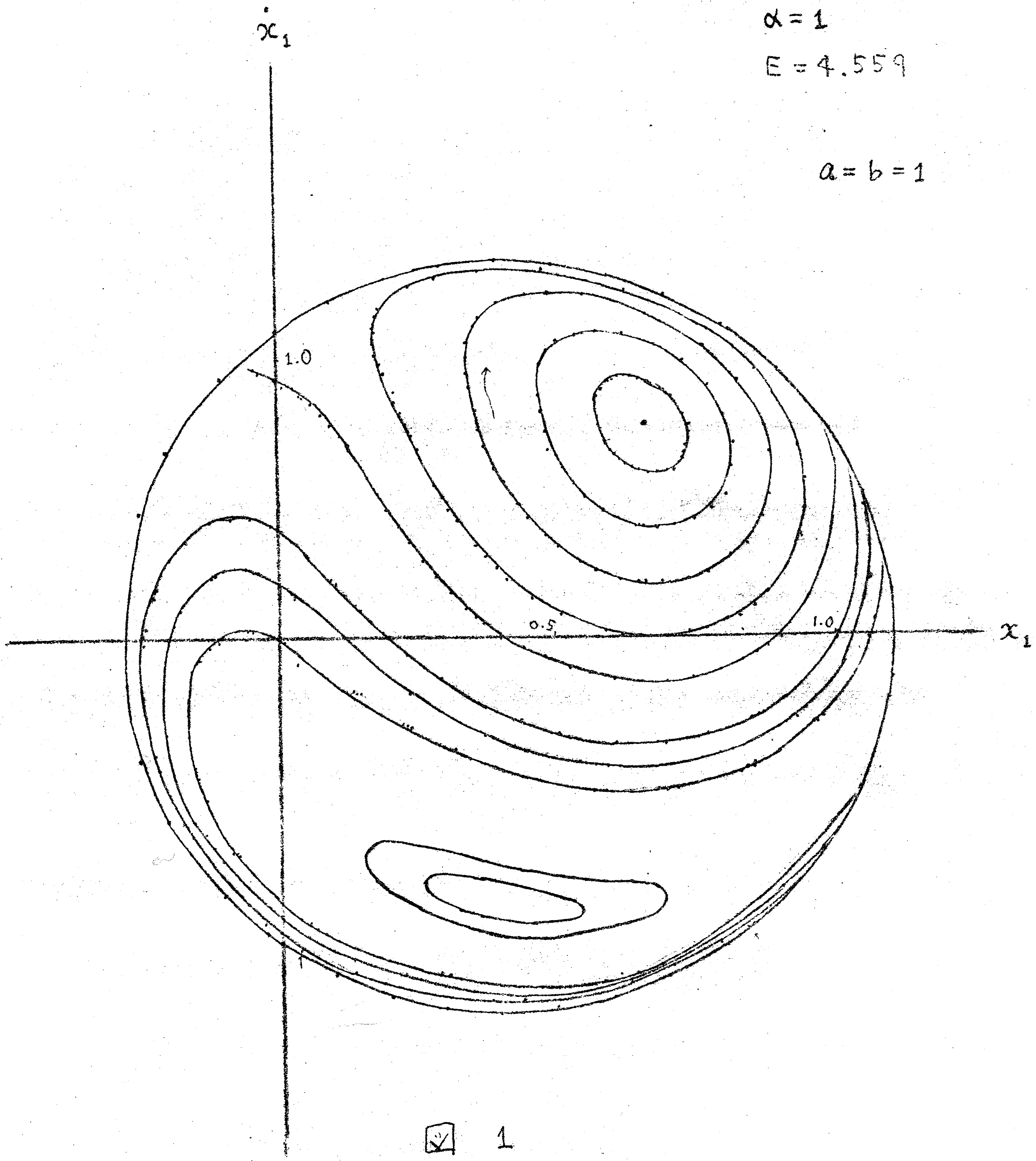

図 1

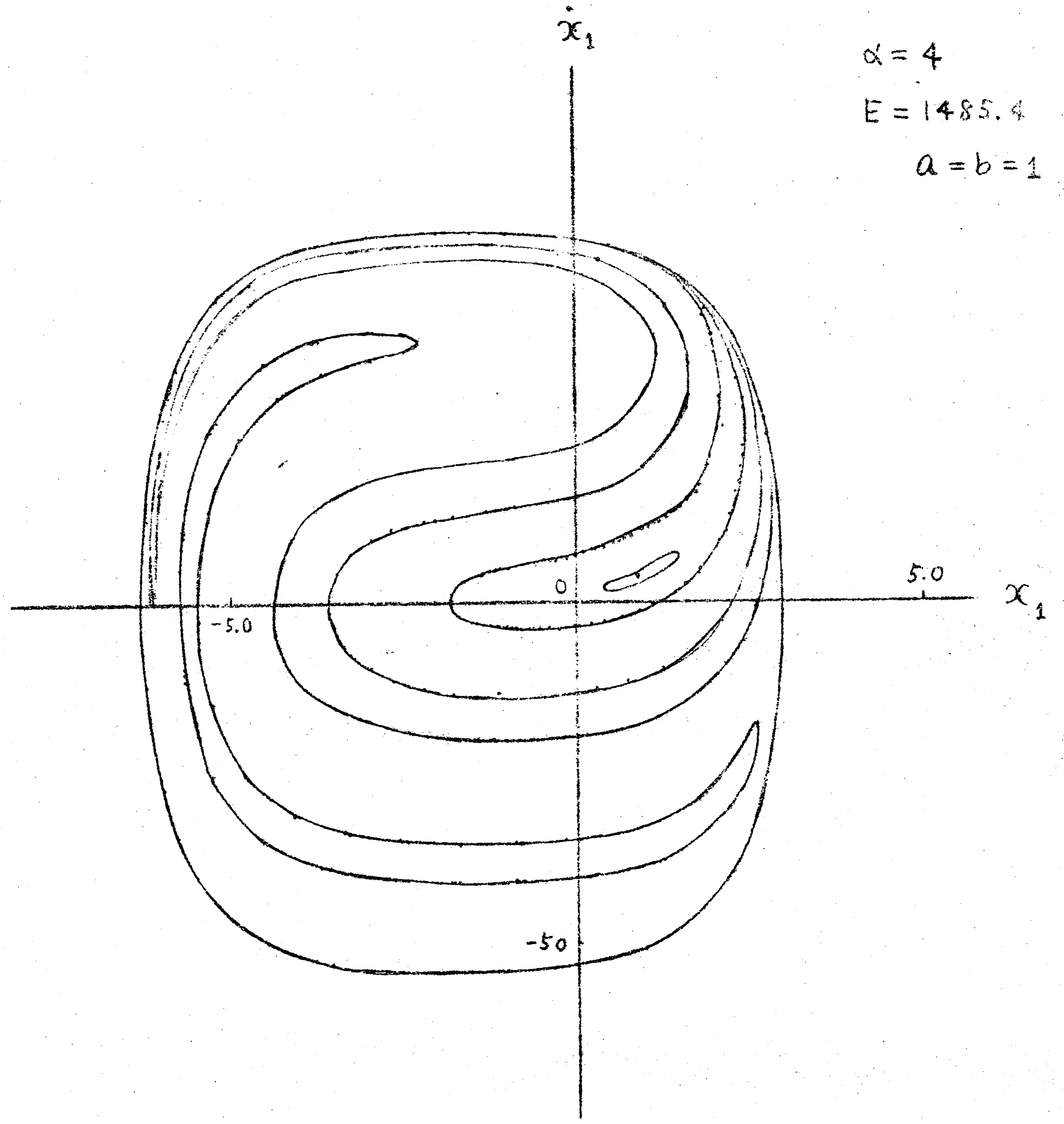

図 2