

ソリトンと inverse scattering problem

東大 光研 戸田盛和

§1 序

非線型の波動現象が量子力学的な散乱の問題と関係づけられる場合が発見され、この現象の特長、解法などについての新しい観点が出現しようとしている。この観点は現在不明確な点もあるし、すべての非線型方程式に有効であるとも考えられないが、Korteweg-de Vries 方程式、nonlinear Schrödinger 方程式、そしておそらくは modified KdV 方程式などに対して有効である。

この方法の歴史をふり返ってみると、いくつかの分野の国もたがう数学者、物理学者が、ある場合にはたがいに関係なく、前後して似た仕事や現在次ぎつぎとつぎ合めされつつあるように思われる。現在でも知られずに進行している仕事があるかも知れない。これからたがいに統一されて確固たる観念が立てられる日が近いことを思わせる。

発見のいくつかはプリンストン大学ポフス研究所を中心とするグループの一連の仕事の中にある。すなわち、KdV 方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

に対し¹⁾ Miura et al. は associated eigenvalue problem

$$\psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0 \quad (2)$$

を考へ、固有値 λ がパラメータ t と t の時間によらぬことを証明した。

この計算過程に着目して、Gardner et al.²⁾ は $|x| \rightarrow \infty$ に対する $\psi(x, t)$ の漸近形から u を求める解法を考へ出した。これは散乱の逆問題である。 $\psi(x)$ の漸近形から u を求める逆問題はすでに Gel'fand-Levitan³⁾ および Marchenko が論じているところであり、Kay-Morse⁴⁾ も Gel'fand-Levitan の方程式を研究し、特別な場合に対する解法を考へ出した。この特別な場合は、反射波のない、すなわち完全透過のポテンシャル $u(x)$ であり、これはソリトンの集まりの解を考へたことと Gardner は述べている²⁾。しかしその具体的な形、解の性質の吟味は考へていない。

P. D. Lax⁵⁾ は Gardner の取組を数学的に整理

1.

してゐる。

最近 Zakharov と Shabat⁶⁾ の nonlinear Schrödinger 方程式に対し、散乱の逆問題の方法を適用して成功を収めた。これは Lax と Gardner の方法を折衷拡張したものである。

この方法は疑点があるが、これらの方程式の解法などに極めて有力なものであると思われ、Lax, Gardner や Zakharov の扱いを参考にし、簡単な場合、すなわち KdV 方程式の場合に手とぬきよすと思ふ。

§ 2. 非線型方程式

$u(t)$ を含む演算子 $L = L[u(t)]$ を考え、固有値方程式

$$L\psi = \lambda\psi \quad (3)$$

に注目する。⁵⁾ パラメータ t についての微分すると

$$L_t\psi + L\psi_t = \lambda\psi_t + \lambda_t\psi \quad (4)$$

$\lambda = \text{const}$ の場合 ψ の時間変化を

$$i\psi_t = A\psi \quad (5)$$

とすると $i\lambda\psi_t = A\lambda\psi = AL\psi$ であるから

$$L_t\psi = i[L, A]\psi + \lambda_t\psi \quad (6)$$

したがって $[L, A] = LA - AL$ を得る。

さて、波動方程式

$$u_t = S[u] \quad (7)$$

が問題の非線形波動方程式であると、与えられた $S[u]$ の形に対して、この方程式が $u_t = S[u]$ が

$$L_t = i[L, A] \quad (8)$$

と同じであるような L と A を選べるとする。そうすると、そのように L に対し

$$\lambda_t = 0 \quad (9)$$

すなわち L の固有値は時間経たっても変わらない。

KdV 方程式の場合は

$$\left. \begin{aligned} L &= -\frac{d^2}{dx^2} + u, \\ A &= -4i\frac{d^3}{dx^3} + 3i\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right) + C \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と選ぶことができる。 (C は x に依存しないものとする。このとき)

$$L_t = i[L, A] \rightarrow u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (11)$$

$$L\psi = \lambda\psi \rightarrow \psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0 \quad (12)$$

$$i\psi_t = A\psi \rightarrow \psi_t = -4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi + C\psi \quad (13)$$

$$L$$
 の 3 は (12) から $\psi_{xxx} - u\psi_x - u_x\psi + \lambda\psi_x = 0 \quad (12')$

これに 3 を掛けた (13) から $3|<$

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x = C\psi \quad (14)$$

1

と存²⁾了。 $|x| \rightarrow \infty$ ならば $u \rightarrow 0$ とす。

負の固有値 $\lambda_n = -\kappa_n^2$ に対¹⁾して, $|x| \rightarrow \infty$ の
 ψ は指数関数的に 0 になり,

$$\psi_n \approx c_n(t) \exp(+\kappa_n x), \quad x \rightarrow -\infty \quad (15)$$

であるが, 二つの規格化 $\int \psi_n^2 dx = 1$ から $c_n > 0$ とす。
 また $c_n \equiv 0$ であることはわか³⁾る。今
 (14) に ψ を挿入し各項を積分 (左とす $\psi = \psi_n$ に対¹⁾して)

$$\int \psi \psi_t dx = \frac{d}{dt} \int \psi^2 dx = 0,$$

$$\int \psi \psi_{xxx} dx = - \int \psi_x \psi_{xx} dx = - \frac{1}{2} \int \frac{d}{dx} (\psi^2) dx = 0,$$

また $\psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0$ によ³⁾り

$$\int \psi u \psi_x dx = \int \psi_x (\psi_{xx} + \lambda \psi) dx = 0$$

とす³⁾が, 左辺は 0 になるが右辺は $C \int \psi^2 dx = C$ とす³⁾
 から $C \equiv 0$ である。したがって $C \equiv 0$ であり, $x \rightarrow -\infty$ に対¹⁾して

$$(14) \text{ は } \psi_t + \psi_{xxx} + 3\kappa_n^2 \psi_x = 0. \quad \text{これは (15) を } \lambda \text{ 代入³⁾して}$$

$$\frac{dc_n}{dt} + 4\kappa_n^3 c_n = 0$$

したがって ²⁾

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-4\kappa_n^3 t}. \quad (16)$$

正の固有値 $\lambda = k^2 > 0$ に対¹⁾しては, $|x| \rightarrow \infty$ の
 とき, ψ は $e^{\pm i k x}$ の線形結合と与え³⁾らる。今 $c = c', x$

の正の側から入射する波の反射係数を b , 透過係数を a とし,

$$\left. \begin{aligned} \psi &\approx e^{+ikx} + b e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ \psi &\approx a e^{+ikx}, & x \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} (17)$$

とする。これを(14)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} e^{-ikx} - 4ik^3 e^{+ikx} + 4ik^3 b e^{-ikx} \\ = C e^{+ikx} + C b e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$\frac{da}{dt} e^{+ikx} - 4ik^3 a e^{+ikx} = C a e^{+ikx}, \quad x \rightarrow +\infty$$

$e^{\pm ikx}$ の係数を等しくおき,

$$C = -4ik^3, \quad \frac{db}{dt} = -8ik^3 b,$$

$$\frac{da}{dt} = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(したがって)} \quad b(k,t) &= b(k,0) e^{-8ik^3 t} \\ a(k,t) &= b(k,0) \end{aligned} \right\} (18)$$

束縛状態(15)の漸近形の係数 C_n の時間変化は(16)で与えられる。連続固有値に対する漸近形(17)の係数の変化は(18)で与えられる。

§3. 散乱の逆問題

束縛状態の κ_n と C_n , 反射係数 $b(k)$ が与えられると

1.5

き, これから $u(x)$ を求めるのが散乱の逆問題である。

◎ 方程式は

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \{\lambda - u(x)\} \psi = 0 \quad (19)$$

であり, $x \rightarrow -\infty$ で $\psi \rightarrow e^{-ikx}$

$$\psi(x) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x K(x,s) e^{-iks} ds \quad (20)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi - u \psi &= \left\{ 2 \frac{\partial K(x,x)}{\partial x} - u \right\} e^{-ikx} \\ &+ \int_{-\infty}^x \left[K_{xx}(x,s) - K_{ss}(x,s) - u(x) K(x,s) \right] x \\ &\quad \times e^{-iks} ds \end{aligned}$$

しかし $K_{xx}(x,s) = \partial^2 K(x,s) / \partial x^2$ 等, と得る。したがって

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= 2 \frac{\partial K(x,x)}{\partial x} \\ \Delta(x,s) \equiv K_{xx}(x,s) - K_{ss}(x,s) - u(x) K(x,s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

存在して (19) は満足された。

◎ $R(x)$ を任意の関数として (2) 次式を証明された:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - u(x) \right] \left\{ K(x,y) + R(x+y) + \int_{-\infty}^x K(x,z) R(y+z) dz \right\} \\ = \Delta(x,y) + \left\{ 2 \frac{\partial K(x,x)}{\partial x} - u(x) \right\} + \int_{-\infty}^x \Delta(x,z) R(y+z) dz \end{aligned}$$

したがって方程式

$$K(x, y) + R(x+y) + \int_{-\infty}^x K(x, z) R(y+z) dz = 0 \quad (22)$$

は, (21) により満足される. この方程式は Gel'fand-Levitan の方程式 (Marchenko 方程式) と呼ばれている.

これから η を任意に選ぶ逆問題にとりかかろう.

3-1. $\psi(x, k) \rightarrow e^{-ikx}$ ($x \rightarrow -\infty$) であるから, これを

$$\psi(x, k): \quad e^{-ikx} \longleftarrow \left| \begin{array}{c} u \\ \hline \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array}$$

で表わそう. すると

$$\psi^*(x, k) = \psi(x, -k): \quad e^{ikx} \longrightarrow \left| \begin{array}{c} u \\ \hline \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array}$$

これは (19) の独立な二つの解である:

3-2 散乱を表わす波を

$$\varphi(x, k): \quad \begin{array}{l} e^{ikx} \xrightarrow{\text{入射}} \\ b(k)e^{-ikx} \xleftarrow{\text{散乱}} \end{array} \left| \begin{array}{c} u \\ \hline \end{array} \right. \xrightarrow{\text{透過}} a(k)e^{ikx}$$

とし, これを $\psi(x, k)$ と $\psi^*(x, k)$ とで表わし

$$\varphi(x, k) = \psi^*(x, k) + b(k)\psi(x, k) \quad (23)$$

$$= a(k)\tilde{\psi}(x, k) \quad (24)$$

と書くことができる. ここに

$$\tilde{\psi}(x, k): \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} u \\ \hline \end{array} \right. \longrightarrow e^{ikx}$$

3-3 (23) を用いた次の式を作ります:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, k) e^{-iky} dk = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi^*(x, k) + b(k)\psi(x, k)] e^{-iky} dk \quad (25)$$

この式の右辺と左辺を別々に考える。

右辺に (20) を用いると $x > y$ のとき

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= 2\pi K(x, y) + \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{-ik(x+y)} dk \\ &\quad + \int_{-\infty}^x K(x, s) ds \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{-ik(s+y)} dk \end{aligned} \quad (26)$$

を得る。左辺に $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk = 0$ ($x > y$) を用いる。

左辺における $\varphi(x, k)$ と (24) を用いる。 $u(x)$ による束縛状態は純虚数 $k = i\kappa$ により表わされるので、

$$\Psi(x, i\kappa) \rightarrow e^{-\kappa x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

である。この束縛状態は $x \rightarrow -\infty$ で $e^{+\kappa x}$ の形で収束するはずである。 $\Psi(x, k) = \beta\psi^*(x, k) + \alpha\psi(x, k)$ と展開したとき $x \rightarrow -\infty$ で $e^{+\kappa x}$ ($k = i\kappa$) になり、これは $\psi(x, k)$ であるから、 $k = i\kappa$ のとき、 α をある係数として

$$\Psi(x, i\kappa) = \alpha\psi(x, i\kappa)$$

で表わされる。 Faddeev はこれを証明した。束縛状態は $\varphi(x, k)$ の pole になり、この pole は透過率 $\alpha(k)$ の pole ($k = i\kappa$) になる。
これを図 6 積分路をとると (25) の左辺は

$$(左辺) = \alpha 2\pi i \operatorname{Res} a(k) \Big|_{k=ix} \psi(x, ik) e^{xy} \quad (27)$$

とたす。 $2\pi m(k) = -\alpha 2\pi i \operatorname{Res} a(k) \Big|_{k=ik} \quad (28)$

とたす (20) を用いると, (27) は

$$(左辺) = -2\pi \left\{ \sum_n m(k_n) e^{k_n(x+y)} + \sum_n m(k_n) \int_{-\infty}^x K(x, s) e^{k_n(s+y)} ds \right\} \quad (29)$$

とたす。 k の pole は決まると $k = k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ とあると (28)。

よって (25) の両辺に λ をかけると Gelfand-Levitan の式

$$K(x, y) + R(x+y) + \int_{-\infty}^x K(x, s) R(s+y) ds = 0 \quad (30)$$

が得られる。ここに

$$R(x+y) = \sum_n m(k_n) e^{k_n(x+y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{-ik(x+y)} dk \quad (30')$$

これは素線状態の k_n および $m(k_n)$, 散乱の係数 $b(k)$ を与えたとき, $R(x+y)$ が与えられたら, G-L の方程式を解いて, $K(x, y)$ を求め, したがって $u(x) = 2K_x(x, x)$ により $u(x)$ が得られる方程式を与える。

3-4 $m(k_n)$ は §2 の $C_n(t)$ と書かれたもの。時間 t をパラメータとして (2) を解き, 3-3 で得られた $u(x, t)$ は KdV 方程式の解: となる。

文献

- 1) R.M. Miura, C.S. Gardner, M.D. Kruskal: *J. Math. Phys.* 9 (1968) 1204
 - 2) C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura: *Phys. Rev. Lett.* 9 (1967) 1095.
 - 3) I.M. Gelfand, B.M. Levitan: *Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, vol 1* (1955) 253.
 - 4) I. Kay, H.E. Moses: *Nuovo Cimento* 3 (1956) 276, *J. Appl. Phys.* 27 (1956) 1503.
 - 5) P.D. Lax: *Comm. Pure and Appl. Math.* 21 (1968) 467
 - 6) V.E. Zakharov, A.B. Shabat: *Soviet Phys. JETP* 34 (1972) 62
 - 7) L.D. Faddeev: *Amer. Math. Soc. Translations Ser. 2 vol. 65* (1968) 139.
- ★) Faddeev が示しているように $\psi(x, k)$ は複素 k 平面において, 上半面 ($\text{Im } k > 0$) で解析的である。
 ψ, ψ^* の記号は Zakharov-Shabat に使われた。24
 は Faddeev の $f_1(x, k), f_2(x, k)$ などと対称に 2 次
 になった。

$$\psi(x, k) \leftrightarrow f_2(x, k)$$

$$\psi^*(x, k) \leftrightarrow f_2(x, -k)$$

$$\tilde{\psi}(x, k) \leftrightarrow f_1(x, k)$$

$$\varphi(x, k) \leftrightarrow \psi_1(x, k)$$

$$\text{また, } a(k) \leftrightarrow S_{11}, \quad b(k) \leftrightarrow S_{12}.$$