数理解析研究所講究録
171巻 1973年 95-107

可附番自由度の力学系の統計流体力学

東大 工学部 桑原 真二

§1. 序論

乱流の場を確率過程として定式化すれば、位相空間すなわち、流れの場の関数空間における確率分布密度汎関数に対する確率保存の式となる。

我々が解きたい問題はまず、この確率保存の式の定常解である。が、特別な非現実的な解（非粘性の場合の白いスペクトル）以外に解は求まっていない。この問題を困難にしている原因は、現実の一様な乱流では、必ず粘性散逸が存在し、定常解を予想することができず、粘性散逸をおぎなうために、常にエネルギー供給を行っているような系、たとえば、管中の乱流、平板乱流境界層等、複雑な系でなければ、定常解が存在しないことに基因している。

次にときたい問題は、空間的一様な乱流に対応する初期分布を与えて解く、初期値問題である。こゝでの困難は初期分布を如何にとるかという問題である。等重率のようなア・プリオリな仮定はもちろん成りたゝない。なるべく簡単で、

確率分布の諸条件を満足するものをえらぶという経験的な方法がとられる。

簡単のために、可附番の変数であらわされる力学系にたいする確率存存の式を求めよう。例えば第1図のように、2つのピストンで境された円柱に流体がみたされ、時刻 $t<0$ では速度は殆ど0：

$$\mathbf{v} \fallingdotseq 0 \qquad (\sqrt{\overline{\mathbf{v}^2}} \ll U) \tag{1.1}$$

とする。$t=0$ で管を急に速度 $-U$ で動かし始める。この系では、境界条件は定常である。このような流れの場が

$$v_\alpha(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{3l+\alpha}(t)\, v_\alpha^{l}(x) \qquad (t>0) \tag{1.2}$$

で表わされるものとする。ここで

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{v}^0 = 0 & \text{流れの場で} \\ \mathbf{v}^0 : & \text{定常な境界条件を満足する} \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{v}^l = 0 & : \text{流れの場で} \\ \mathbf{v}^l = 0 & : \text{境界で} \end{array}\right\} \quad l \geq 1 \tag{1.4}$$

であり、$\{\mathbf{v}^l\}_{l=0}^{\infty}$ は L_2 の意味で完備な関数系とする。

Navier-Stokes の方程式は、連続の方程式と共に、適当な方法で、たとえば、Galerkin 法で

$$\frac{\partial a_m}{\partial t} = \mathcal{N}_m(\mathfrak{a}) + \mathcal{L}_m(\mathfrak{a}) \qquad (1.5)$$

の形に帰着される。$\mathcal{N}_m$ は $\mathfrak{a}$ について2次（非線型項）、$\mathcal{L}_m$ は $\mathfrak{a}$ について1次となる。この式により力学系は無限次元のベクトル $\mathfrak{a}$ によって表わされたことになる。それ故、$\mathfrak{a}$ 空間を位相空間と考え、そこに確率分布密度関数

$$D = D(\mathfrak{a}, t) \qquad (1.6)$$

を導入することができる。1つの力学系を時間的に追跡すれば、運動方程式（1. 5）によって、位相空間中を自然運動 natural motion する。色々の初期値に対応する力学系を考えれば、位相空間の各点から出発する自然運動がえられる。初めにこの各点に確率を分布させれば、(1.5) の助けをかりて、その後の確率分布はもとめられるはずである。確率保存の式は

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a_l}(\dot{a}_l D) = 0 \qquad (1.7)$$

となる。こゝで $\dot{a}_l$ は (1.5) の右辺である。

§2. 確率保存の式の積分と平均量

$\{a_l\}$ の l の大きいものは、いわば高周波をあらわし、粘性散逸による減衰がはげしいと考えられる。そこで D を

$$D = D(a_0, a_1, \cdots, a_L, t) \qquad (2.1)$$

のように $\mathfrak{a}$ を有限次元にする近似が許されよう。そこで、

(1.7)を有限次元にして

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial}{\partial v_l}(u_l D)=0 \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{array}{l} D=D(v_1,\cdots,v_L,t) \\ u_l=u_l(\mathbf{v},t) \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

初期値 $\quad D(\mathbf{v},0)=\hat{D}(\mathbf{v},0)$ $\quad$ (2.4)

の積分を考える。

今、運動方程式の初期条件：

$$v_l=\hat{v}_l \qquad (t=0) \tag{2.5}$$

のもとに

$$\frac{\partial v_l}{\partial t}=u_l(\mathbf{v},t) \tag{2.6}$$

をとくと、

$$v_l=v_l(\hat{\mathbf{v}},t) \tag{2.7}$$

がえられる。そこで、$\mathbf{v}$を$\hat{\mathbf{v}}$からの変換とみなし

$$\left\{\begin{array}{l} v_l=v_l(\hat{\mathbf{v}},s) \\ t=s \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \hat{v}_l=\hat{v}_l(\mathbf{v},t) \\ s=t \end{array}\right. \tag{2.8}$$

とおくと、

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial s}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\displaystyle\sum_{l=1}^{L}u_l\dfrac{\partial}{\partial v_l} \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{v}_l}=\displaystyle\sum\dfrac{\partial v_m}{\partial \hat{v}_l}\dfrac{\partial}{\partial v_m} \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

から、(2.2)は

$$\frac{\partial}{\partial s} J D = 0 \qquad (2.10)$$

となる。こゝで

$$J = \frac{\partial(v_1, \cdots, v_L)}{\partial(\hat{v}_1, \cdots, \hat{v}_L)} \qquad (2.11)$$

は，$\mathbb{v} \to \hat{\mathbb{v}}$ の変換のヤコビ行列である。

(2.10)は

$$J D = \hat{D} \qquad (2.12)$$

ととける。今 $f = f(\mathbb{v}, t)$ なる量の統計平均値は

$$\begin{aligned}\langle f \rangle(t) &= \langle f \rangle(s) \\ &= \int \cdots \int f(\mathbb{v}, t) D(\mathbb{v}, t) d\mathbb{v} \\ &= \int \cdots \int f(\mathbb{v}(\hat{\mathbb{v}}, t), t) \hat{D}(\hat{\mathbb{v}}) d\hat{\mathbb{v}} \qquad (2.13)\end{aligned}$$

となる。

§3. Burgers 方程式に対するフーリエ級数モデル

Burgers 方程式：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} - \bar{\nu}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.1)$$

を簡単のために

$$v(0, t) = v(1, t) = 0$$

の境界条件を課して，

$$v = \sum_{l=1}^{\infty} v_l(t) \sin \pi l x \qquad (3.2)$$

の形に展開できるとすると、(3.1)から

$$\dot{v}_1 + \pi^2 \bar{\nu} v_1 + \frac{\pi}{2}\left[v_1 v_2 - \sum_{m=2}^{\infty} m v_m (v_{m-1} - v_{m+1}) \right] \qquad (3.3a)$$

$$\dot{v}_l + \pi^2 l^2 \bar{\nu} v_l + \frac{\pi}{2}\left[\sum_{m=1}^{l-1} m v_m v_{l-m} - \sum_{m=l+1}^{\infty} m v_m v_{m-l} + \sum_{m=1}^{\infty} m v_m v_{l+m} \right] = 0 \qquad l \geq 1 \qquad (3.3b)$$

がえられる。(3.3a), (3.3b)において、v_lをL項でとめると

$$\dot{v}_1 + \pi^2 \bar{\nu} v_1 - \frac{\pi}{2}(v_1 v_2 + v_2 v_3 + \cdot \quad + v_{L-1} v_L) = 0 \qquad (3.4a)$$

$$\dot{v}_l + \pi^2 l^2 \bar{\nu} v_l - \frac{\pi}{2}\left[l(v_1 v_{l+1} + v_2 v_{l+2} + \cdots + v_{L-2} v_L) - v_1 v_{l-1} - 2 v_2 v_{l-2} - \cdots \quad (l-1) v_{l-1} v_l \right] = 0 \qquad (3.4b)$$

がえられる。

ここで(3.4a)にv_1を、(3.4b)にv_lをかけて加え合すことによって、$\bar{\nu} = 0$の場合に

$$\frac{d}{dt} \sum_{l=1}^{L} v_l^2 = 0 \qquad (3.5)$$

すなわち、エネルギー保存 $\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L} v_l^2 =$ 一定がえられる。

フーリエ2成分だけをとり

$$v_1 = a\cos\theta \qquad v_2 = a\sin\theta$$

とおくと $\bar{v}=0$ の場合に、(3・4a)、(3・4b) は

$$\left.\begin{aligned} &\dot{a} = 0 \\ &\dot{\theta} + \frac{\pi}{2} a\cos\theta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

初期条件： $a=\hat{a}$, $\theta=\hat{\theta}$ に対する解は

$$\sin\theta = -\frac{\sinh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t - \cosh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t\sin\hat{\theta}}{\cosh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t - \sinh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t\sin\hat{\theta}} \qquad (3.7a)$$

$$\cos\theta = \frac{\cosh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t}{\cosh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t - \sinh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t\sin\hat{\theta}} \qquad (3.7b)$$

となる。

次に確率保存の式を (a,θ,t) でかくと

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}(a\dot{a}D) + \frac{\partial}{a\partial\theta}(a\dot{\theta}D) = 0 \qquad (3.8)$$

となる。ここで (3.6) を入れると

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\pi}{2} a \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta D) = 0 \qquad (3.9)$$

がえられる。この定常解は

$$\left.\begin{aligned} &D = f_1(a)\,\delta\!\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) + f_2(a)\,\delta\!\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right) \\ &\int_0^\infty (f_1+f_2)\,a\,da = 1, \qquad f_1, f_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.10)$$

である。

初期分布 $D(a,\theta,0)=\hat{D}(a,\theta)$として

$$\hat{D}(a,\theta)=\frac{1}{2\pi a}\delta(a-\hat{a}) \tag{3.11}$$

をとれば、積分できて、

$$\left.\begin{aligned}\langle v_1\rangle(t)&=0\\ \langle v_2\rangle(t)&=-\frac{\hat{a}}{\sinh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t}\left(\cosh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t-1\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

がえられる。そこで

$$\begin{aligned}\langle v\rangle(t)&=\langle v_1\sin\pi x+v_2\sin 2\pi x\rangle\\ &=-\frac{\cosh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t-1}{\sinh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t}\sin 2\pi x\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\langle v(x)\,v(x')\rangle(t)=\hat{a}^2\frac{\cosh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t-1}{\sinh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t}\left[\sin\pi x\sin\pi x'+\cosh\frac{1}{2}\pi\hat{a}t\sin 2\pi x\sin 2\pi x'\right] \tag{3.14}$$

がえられる。

$\bar{\nu}\neq 0$については、(3.6)に対応する式は

$$\left.\begin{aligned}&\dot{a}+\pi^2\bar{\nu}a(1+3\sin^2\theta)=0\\ &\dot{\theta}+3\pi^2\bar{\nu}\cos\theta\sin\theta+\frac{\pi}{2}a\cos\theta=0\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

となる。これは数値計算でとくほかはない。$a=1$の初期条件で$\bar{\nu}=0.01$ $(R=100)$の場合にとくと第2図のようになる。

$\bar{\nu}=0$の場合の3成分を

$$v_1 = \cos\theta \qquad v_2 = a\sin\theta\cos\varphi \qquad v_3 = a\sin\theta\sin\varphi \tag{3.16}$$

とおくと、

$$\left.\begin{aligned} \dot{a} &= 0 \\ \dot{\theta} &= -\frac{\pi}{2}(\cos\theta + \sin\theta\sin\varphi)\cos\varphi \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\pi}{2}[\sin\theta(2+\cos 2\varphi) - \cos\theta\sin 2\varphi]\cot\theta \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

となる。上の微分方程式から予想される解曲線は第3図のようになる。

§4. まとめ

この論文であつかった問題をまとめると次のようになる。

(1) 連続無限次元の力学系は完備な関数系に展開できて、可付番次元の方程式であらわされる（運動方程式）。しかも、高次のモードは粘性減衰が大きく省略可能で力学系は有限次元で近似できる。

(2) 統計は、位相空間（速度ベクトル場空間）における確率分布密度関数により導入される。分布関数は確率保存の式により、決定論的に求められる。

(3) 平均量は、運動方程式の初期値問題の解と、初期の確率分布から求められる。

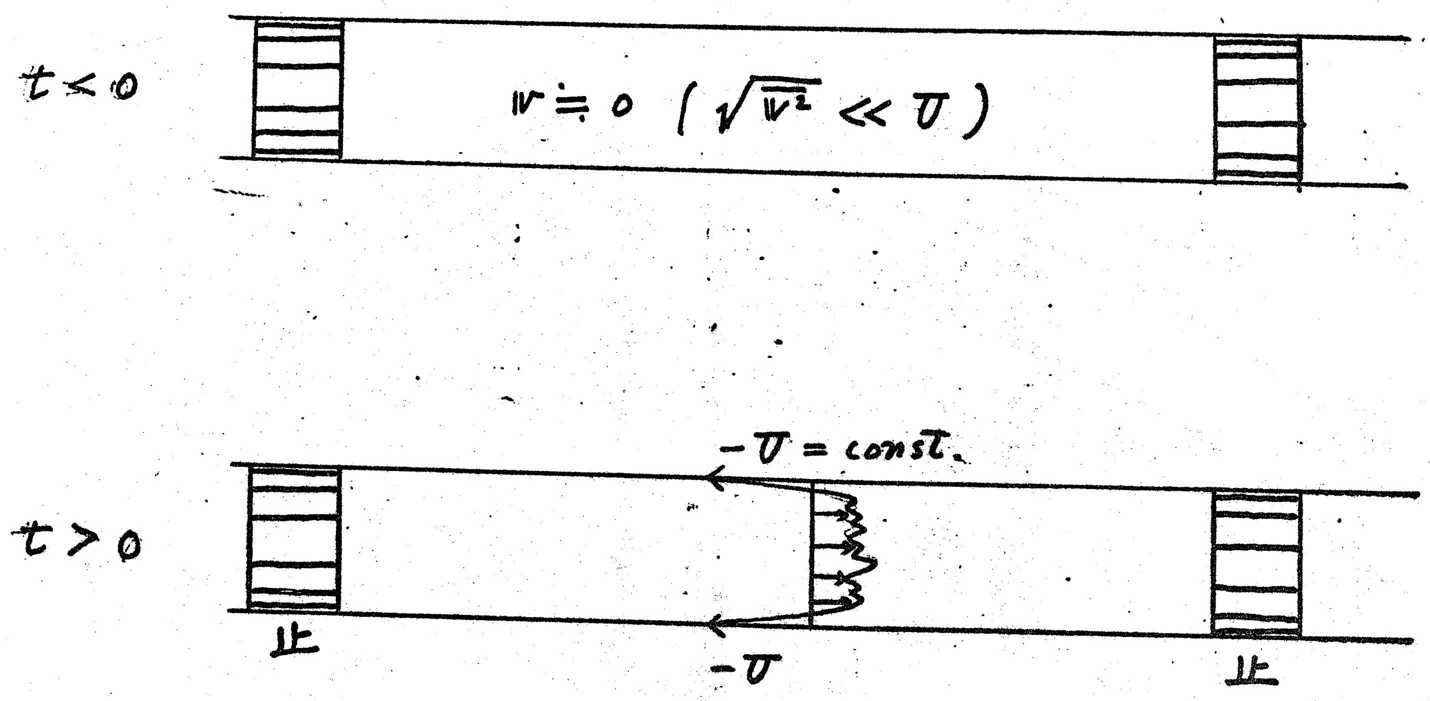
(4) 運動方程式の位数（次元）をふやすことによって近似をすゝめることができる。運動方程式の解析（連立常微分方

式）はむずかくないが、平均量を求める時、必要な積分が次元数だけの多重積分となるため、次元をふやすことによって非常な困難をともなう。

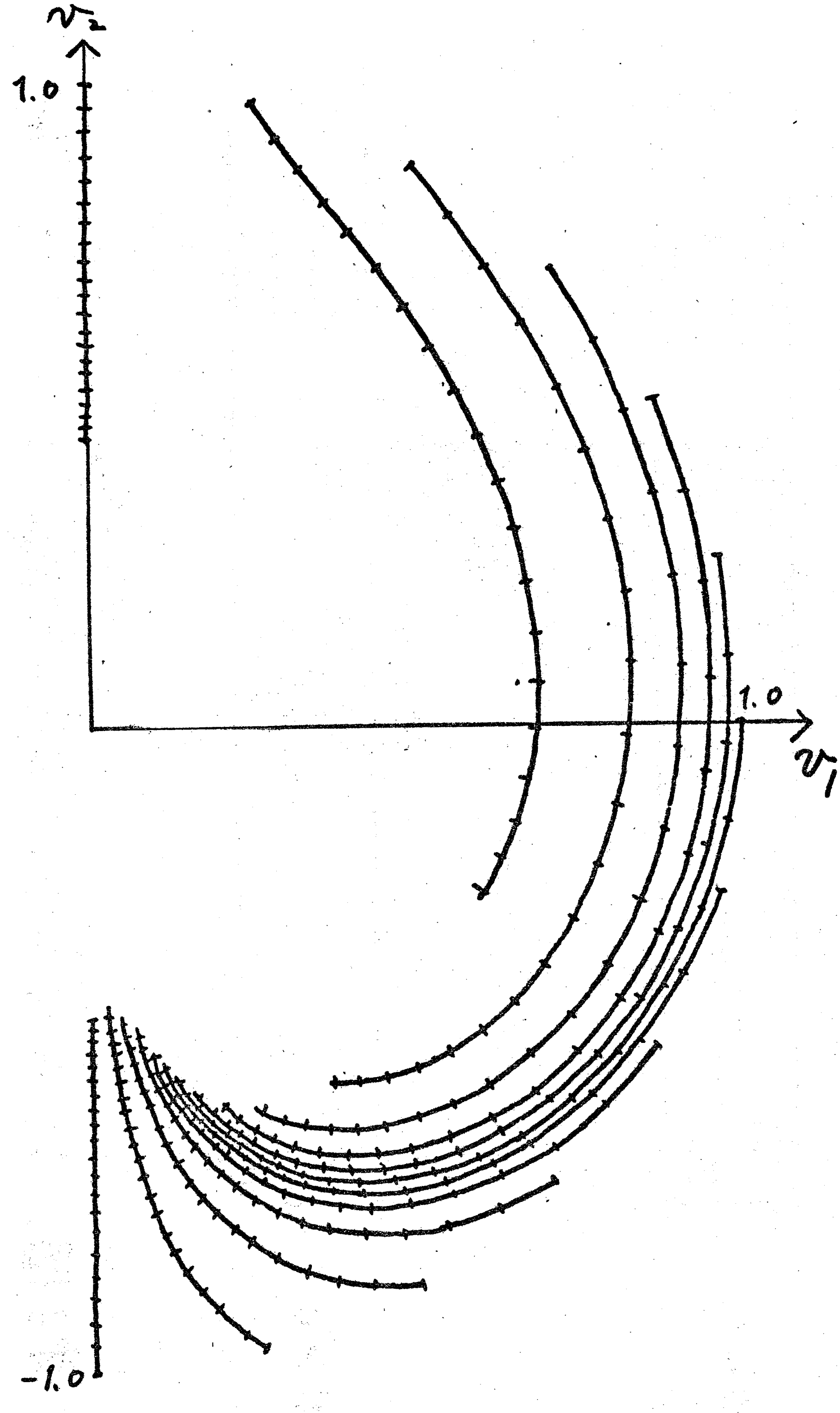
なお、初期エネルギー分布 $\hat{E}_m = E(k_m, 0)$ をあたえた時の最も適切な初期確率分布は

$$\hat{p}(w) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2}(\hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_L)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L} v_l^2/E_l^2}$$

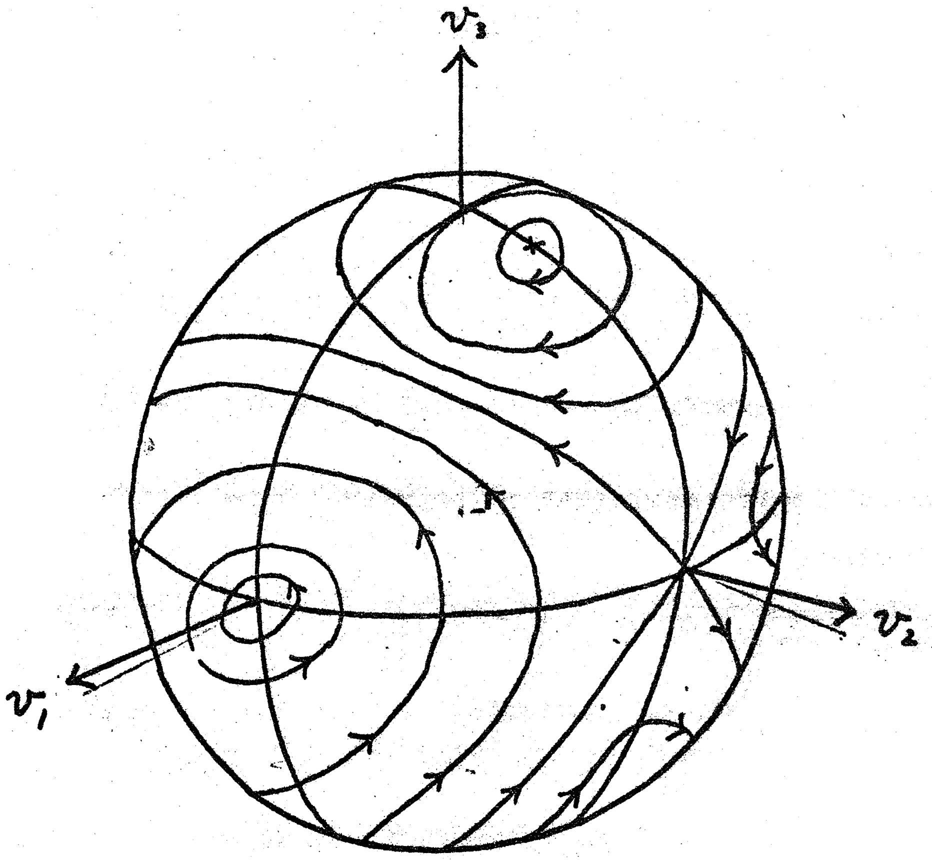
と考えられるが、これによって平均量は求められていない。



第1図. 乱流場についての思考実験



オ2図. Burgers 方程式, 2フーリエ成分モデル
$\bar{\nu}=0.01$ の時の解曲線.



第3図 Burgers方程式，3フーリエ成分
モデル $\nu=0$ の時の解曲線