数理解析研究所講究録
171巻 1973年 1-7

Burgers 乱流の相関とスペクトル

京大理　　巽　友正
　　　　　木田　重雄

§1. 速度場

Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

に従う速度場は、非粘性の極限（$R\to\infty$）では、どのような初期条件から出発しても、充分時間が経つ（$1 \ll t \ll R$）と、図1のように、斜線と垂線で表わされ、系の運動は次の四つに要約されることがわかっている。

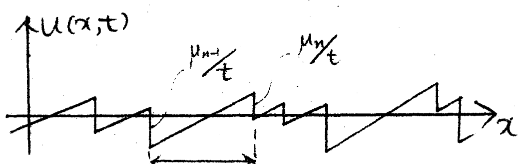
(i) 斜線の傾き $\propto \frac{1}{t}$

(ii) $\frac{d}{dt}\mu_n = 0$

(iii) $\frac{d}{dt}\lambda_n = \frac{1}{t}\left(\lambda_n - \frac{\mu_{n-1}+\mu_n}{2}\right)$

(iv) 強さ μ_{n-1}/t と μ_n/t の shock の衝突から、強さ $(\mu_{n-1}+\mu_n)/t$ の shock ができる。

図1

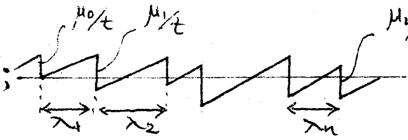


§2. 分布函数

この速度場の統計を考えるため、次の分布函数を導入する

$N(t)$; $0 \leqq x \leqq L$ における shock の総数

$f_0(\mu, t)$; μ の確率密度

$g_n(\mu_0, \cdots, \mu_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_n; t)$; 

の確率密度

$g(\mu, \mu'; \lambda; t)$; λだけ離れて、強さ μ/t, μ'/t の2つの shock がある確率密度.

ところで、定義から明らかに、次式が成り立つ.

$$g(\mu, \mu'; \lambda; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \lambda)}{\int \cdots \int} d\mu_1 \cdots d\mu_{n-1} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \, g_n(\mu, \mu_1, \cdots, \mu_{n-1}, \mu'; \lambda_1, \cdots, \lambda_n; t)$$

§3. 分布函数方程式

上に述べた運動法則を用いて、分布函数についての方程式を作ると次のようになる.

$$\frac{d}{dt} N(t) f_0(\mu, t) \delta\mu = N(t) \delta\mu \Big\{ \int_0^{\mu} g_1(\mu', \mu - \mu'; 0; t) \frac{\mu}{2t} d\mu'$$

$$- \int_0^{\infty} \left[g_1(\mu, \mu'; 0; t) + g_1(\mu', \mu; 0; t) \right] \frac{\mu + \mu'}{2t} d\mu' \Big\} \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}N(t)g_n(\mu_0,\cdots,\mu_n;\lambda_1,\cdots,\lambda_n;t)\,\delta\mu_0\cdots\delta\mu_n\delta\lambda_1\cdots\delta\lambda_n$$

$$=N(t)\,\delta\mu_0\cdots\delta\mu_n\delta\lambda_1\cdots\delta\lambda_n\times$$

$$\times\left\{\frac{\mu_0}{2t}\int_0^{\mu_0}g_{n+1}(\mu,\mu_0-\mu,\mu_1,\cdots,\mu_n;0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n;t)\,d\mu\right.$$

$$+\frac{1}{2t}\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\int_0^{\mu_i}g_{n+1}(\mu_0,\cdots,\mu_{i-1},\mu,\mu_i-\mu,\mu_{i+1},\cdots,\mu_n;\lambda_1,\cdots,\lambda_i,0,\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_n;t)\,d\mu$$

$$+\frac{\mu_n}{2t}\int_0^{\mu_n}g_{n+1}(\mu_0,\cdots,\mu_{n-1},\mu;\lambda_1,\cdots,\lambda_n,0;t)\,d\mu$$

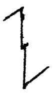
$$-\frac{1}{2t}\int_0^{\infty}(\mu+\mu_0)\,g_{n+1}(\mu,\mu_0,\cdots,\mu_n;0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n;t)\,d\mu$$

$$\left.-\frac{1}{2t}\int_0^{\infty}(\mu_n+\mu)\,g_{n+1}(\mu_0,\cdots,\mu_{n-1},\mu;\lambda_1,\cdots,\lambda_n,0;t)\,d\mu\right\} \qquad (3)$$

§4. (2) 式の解

さて、上の分布函数方程式をここでは、時間的相似解に限って解くことにする。以下では $x=\frac{\mu}{l}$, $y=\frac{\lambda}{l}$ で無次元長さを表わす。ここで、$l(t)$ は、平均 shock 間隔である。

方程式を閉じさすために、次の仮定をする。

$\boxed{\text{仮定}}$  は  の α 倍存在する。

式で書くと、

$$g_n(\mu_0,\cdots,\mu_n;\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1},0;t)=\frac{\alpha}{l^2}g_{n-1}(\mu_0,\cdots,\mu_{n-1}+\mu_n;\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1};t)$$

etc.

この時、解は次のようにきまる。

$$N(t)=N_0\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$l(t)=l_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_0(\mu,t) = \frac{\alpha}{l} e^{-\frac{\alpha\mu^2}{2l^2}} \qquad \left(\text{or } f_0(x) = \alpha e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \right) \tag{4}$$
$$\alpha = \frac{2}{\pi}$$

ここで N_0, l_0 はそれぞれ $t=t_0$ のときの N, l を表わす。

§5. $g(x,x'|y)$ の式

$g(x,x'|y)$ を $g(\mu,\mu';\lambda;t)$ の無次元表示とする。$x=\frac{\mu}{l}$, $x'=\frac{\mu'}{l}$, $y=\frac{\lambda}{l}$ と置いて，(3)式から $g(x,x'|y)$ についての式を作ると，次のようになる。

$$\left\{ 2 + x\frac{\partial}{\partial x} + x'\frac{\partial}{\partial x'} + (x+x'-y)\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial y}\langle X \rangle^{x,x',y} \right\} g(x,x'|y)$$
$$= \alpha \left\{ 2\int_x^\infty x'' g(x'',x'|y)\,dx'' + 2\int_x^\infty x'' g(x,x''|y)\,dx'' - (x^2+x'^2)\, g(x,x'|y) \right\}$$

ここに

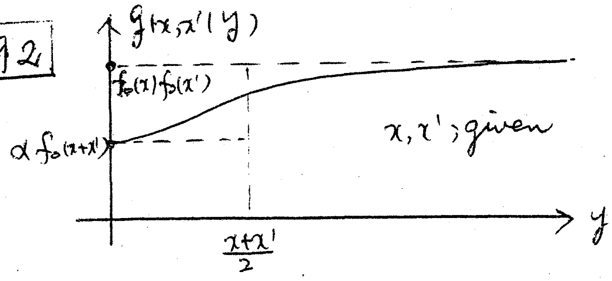
$$\langle X \rangle^{x,x',y} g(x,x'|y) = \sum_{n=2}^{\infty} \int\cdots\int dx_1 \cdots dx_{n-1}\, g_n(x,x_1,\cdots,x_{n-1},x'|y) \times (x_1+\cdots+x_{n-1})$$ である。

境界条件は
$$g(x,x'|0) = \alpha f_0(x+x')$$
$$g(x,x'|\infty) = f_0(x) f_0(x')$$

本当の解は図2の実線のようになっているであろうが，ここでは試みに，次のような函数を考えてみる。

$$g(x,x'|y) = \begin{cases} \alpha f_0(x+x') & (2y < x+x') \\ f_0(x) f_0(x') & (2y > x+x') \end{cases} \tag{5}$$

図2



上の函数は $y\to 0$, $y\to\infty$ では本当の函数に近ずくから
これを用いて計算した結果もこの極限ではかなり正しい
だろうと思われる。

§6. エネルギー

単位長さ当りのエネルギーを

$$\frac{1}{2}\langle u^2\rangle = \frac{1}{2}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_0^L u(x)^2\,dx$$

で定義する。

(1)式を x について, 0から L まで積分し, L で割った式

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle u^2\rangle = -\frac{1}{R}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_0^L u_x^2\,dx$$

に, $R\to\infty$ のときの $u_x \left(\equiv \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ の形

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_i^2 R}{8t^2}\cosh^{-2}\frac{R\mu_i}{4t}(x-\xi_i)$$

を代入すると, 次のようになることがわかる。

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle u^2\rangle = -\frac{1}{12t^3}\frac{\langle\mu^3\rangle}{\langle\mu\rangle} = -\frac{\pi l_0^2}{12t_0}\cdot\frac{1}{t^2}$$

従って、

$$\frac{1}{2}\langle u^2\rangle = \frac{\pi l_0^2}{12t_0 t} \tag{6}$$

これは、エネルギーが $1/t$ に比例して減衰することを示している。

§7、速度相関

$$B(r,t) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\int_0^L u(x,t)\,u(x+r,t)\,dx$$

で速度相関を定義する。

$r \gg l$ では

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}B(r,t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2 l}\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d\mu'\,\mu\mu' g(\mu,\mu';r;t)$$

$r \ll l$ では

$$B(r,t) = B(0,t) - \frac{l^2}{t^2}\left\{ \frac{r}{2l^3}\int_0^\infty \mu^2 f_0(\mu,t)\,d\mu - \frac{r^2}{2l^2} + \frac{1}{l^3}\int_0^r dr' \int_0^{r'} dr'' \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d\mu'\,\mu\mu' g(\mu,\mu';r'';t)\right\}$$

であることがわかっている。この中の $f_0(\mu,t)$, $g(\mu,\mu';r;t)$, $B(0,t)$ にそれぞれ、(4), (5), (6) 式を代入すると、

$r \gg l$ では

$$B(r,t) \simeq \frac{l^2}{t^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-\alpha r^2/l^2}}{\alpha^2 r/l}$$

$r \ll l$ では

$$B(r,t) \cong \frac{l^2}{t^2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\frac{r}{l} + \frac{r^2}{3l^2}\right) \tag{7}$$

となる。

§8. エネルギースペクトル

$$E(k,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(r,t)\cos kr\,dr$$

でエネルギースペクトルを定義する。

特に $k \gg \frac{1}{l}$ では，(7)式を代入し，部分積分することによって，

$$E(k,t) \cong \frac{l^3}{t^2}\,\frac{1}{4(kl)^2}$$

となることがわかる。