数理解析研究所講究録
172巻 1973年 105-118

数列にもとづく円周率の計算

京大数理研　一松 信

§1. 問題

円周率πの計算法には，マチンの公式はじめ多くのよい公式が知られている．しかしたとえば教育用の練習に，10桁くらい求めるのならば，他の方法がいろいろ考えられる．

円に内接または外接する正n角形の周長を計算し，nを次々に2倍してえられる数列の極限値として，πの近似値を求めるのは，微分積分学の発見まで，ほとんど唯一のπの計算法であった．單に数列を次々に求めるだけでなく，それにたくみな加速をほどこして，近似をよくする工夫は，ずいぶん大勢が試みている．

じっさいに，ただ内接，外接多角形の周ではさむだけなら，96角形でも，アルキメデスのえた $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$ くらいしかでないし，35桁求めるには，ルドルフのやったように 2^{62} 角形までの反復がいる．しかしうまく加速すれば，たとえば[5]にあるように，4～64角形のデータから，

$$3.141592653\underline{4}$$

くらいの値が出せる．建部賢弘（1664−1739）は，正 2^{10} 角形までのデータから，小数点以下41桁正しい π の近似値を求めている（[2] 参照；[3] にも記述あり）．

これらの方法を，現代流に解釈し直すことを主眼としたのであるが，結果的には，これらの方法は，べき級数の形で表現される誤差の主要項をつぎつぎに消してゆく周知の算法（たとえば [4]，算法 12.4）の応用であることがわかったので，理論的にはとくに新しいことはない．事実上は [1]，[3] の紹介にすぎない．しかしこの種の実験なら，電卓でも可能であり，初等教育の教材の一つとして考えられると思う．

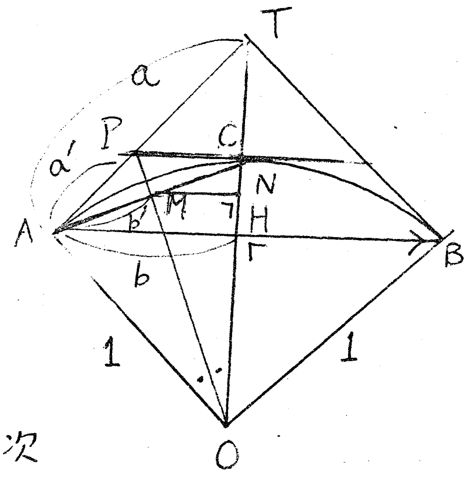
なおあわせて数値積分による π の計算にも言及する．

§2. 計算公式

便宜上半径1の円に外接および内接する正 n 角形の一辺を $2a, 2b$；正 $2n$ 角形の一辺を $2a', 2b'$ とすれば，容易に

$$(1)\qquad a' = \left(\sqrt{1+a^2} - 1\right)/a, \quad b = a/\sqrt{1+a^2}$$
$$b'^2 = \left(1 - \sqrt{1-b^2}\right)/2$$

がえられる．これらは，三角関数の半角公式からもえられるし，また初等幾何学的な考察からも示される．— たとえば図から，$\overline{AP} : \overline{AT} = \overline{OA} : (\overline{OA} + \overline{OT})$；$\overline{AH}\cdot\overline{OT} = \overline{OA}\cdot\overline{AT}$



からはじめの２つの式がでるし，

$\overline{CM}^2 = \overline{CN}\cdot\overline{CO} = (\overline{CH}/2)\cdot\overline{CO}$

から最後の式がでる．

a, b 両方とも使うときには，

$a_1 = 1$ $(n=4)$ からはじめて，順次

(2) $a_{m+1} = (\sqrt{1+a_m^2} - 1)/a_m$

$b_m = a_m/\sqrt{1+a_m^2}$

により，順次 $2^{m+1}a_m$, $2^{m+1}b_m$ の列を作る．b のみのときには，$b^2 = s$ の形の列にして，$s_1 = 0.5$ $(n=4)$ からはじめて，$s_{m+1} = (1-\sqrt{1-s_m})/2$ により順次 $4^{m+1}s_m$ の列を作る．もちろんこのままでは桁落ちを生ずるから，

(3) $a_{m+1} = a_m/(1+\sqrt{1+a_m^2})$

$s_{m+1} = s_m/2(1+\sqrt{1-s_m})$

と変形して計算する．a_m, s_m があまり小さくなると，平方根の引き数の情報落ちが生ずるので，テイラー展開により，

(4) $a_{m+1} = \dfrac{a_m}{2}\left[1 - \dfrac{1}{4}a_m^2 + \dfrac{1}{8}a_m^4 - \cdots\right]$

の形で計算し，$\sqrt{1+a_m^2}$ は，あらためて $1 + a_m a_{m+1}$ として計算するほうが賢明である（そうすれば平方根の計算も不要になる）．

なお[3] には村松茂清（赤穂義士の一人村松喜兵衛の養父）

が 2^{15} 角形までの周長から円周率を21桁だした（ただし誤差 10^{-8}）ことが紹介されている．彼の計算は二十数桁の多倍長計算で桁落ちをおさえる方式（[3]の公式(5)）で，とくに桁落ちをおさえるための工夫はしていないようである．

§3. 結果と加速

TOSBAC 3400（仮数部37ビット）の単長計算によっても，2^{20} 角形までの反復で 3.1415926535 がえられる．

加速の一つの方法は，外接，内接多角形の周が

$$A = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + \frac{2\pi^5}{15n^4} + \cdots \qquad = n\tan\frac{\pi}{n}$$

$$B = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + \frac{\pi^5}{120n^4} - \cdots \qquad = n\sin\frac{\pi}{n}$$

であることを使い，A，B を 1：2 の重みで平均して

$$C = \frac{A+2B}{3} = \pi + \frac{\pi^5}{20n^4} + \cdots$$

を作ることである．その上で，C の誤差が n が倍になるとほぼ 1/16 になることを使って，−1：16 の重みで平均し，これをくりかえしてゆく．この加速を2度行なうと，正64角形までの結果だけで，3.1415926536 がえられる．（別表参照）．

表 1.a

辺数	外接 A	内接 B	C =(A+2B)/3
4	4.0000000000	2.8284271247	3.2189514165
8	3.3137084990	3.0614674590	3.1455478057
16	3.1825978781	3.1214451523	3.1418292942
32	3.1517249074	3.1365484906	3.1416072962
64	3.1441183852	3.1403311570	3.1415935664

表 1.b　Cによる加速値（3.14を略す）

3.14 +

06542316			
15813934	15961103		
15924963	15926725	15926591	
15926511	15926535	15926536	15926536

表 1.c　Aのみによる加速値

3.0849446653			
3.1388943378	3.1424909826		
3.1414339172	3.1416032225	3.1415891311	
3.1415828778	3.1415928085	3.1415926433	3.1415926570

表 1.d　Bのみによる加速値

3.1391475704			
3.1414377167	3.1415903931		
3.1415829367	3.1415926180	3.1415926533	
3.1415920458	3.1415926531	3.1415926536	3.1415926536

外接円　のみによる加速値では，オーダーが1つ低く，64まででは8桁しかでない．ただし128角形の値まで使うと3.1415926536がでる．

[2]によると，建部賢弘は，内接多角形の周長の2乗の系列 $\sigma_m = 4^{m+1} s_m$ に，つぎのような加速をほどこしている．まず $\sigma_{m+1} - \sigma_m$ を作ると，隣り同志の比 $(\sigma_{m+2} - \sigma_{m+1}) \div (\sigma_{m+1} - \sigma_m)$ は 1/4 に近づく．もし正確にこの比が 1/4 ならば，σ_m の極限値を σ とすると

$$\frac{\sigma_{m+2}-\sigma_{m+1}}{\sigma_{m+1}-\sigma_m} + \frac{\sigma_{m+3}-\sigma_{m+2}}{\sigma_{m+1}-\sigma_m} + \cdots + \frac{\sigma_{k+1}-\sigma_k}{\sigma_{m+1}-\sigma_m} = \frac{\sigma_{k+1}-\sigma_{m+1}}{\sigma_{m+1}-\sigma_m}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{k-m}} \to \frac{1}{3} \quad (k \to \infty)$$

から，$(\sigma - \sigma_{m+1})/(\sigma_{m+1} - \sigma_m) = 1/3$，すなわち

(5) $$\sigma = \sigma_{m+1} + \frac{1}{3}(\sigma_{m+1} - \sigma_m) = \frac{4}{3}\sigma_{m+1} - \frac{1}{3}\sigma_m$$

であろう．これは σ_{m+1} と σ_m とを 4：−1 の重みで平均したものである：

$$\sigma_m' = (5)\text{の右辺}$$

とおく．$\sigma_{m+1}' - \sigma_m'$ については，同様の比が $1/4^2 = 1/16$ に近づくので，同様にして

(6) $$\sigma_m'' = \sigma_{m+1}' + \frac{1}{15}(\sigma_{m+1}' - \sigma_m')$$

とする．以下順次比が $1/4^3$，$1/4^4$，… に近づくので，これを可能な限り反復する．ここで比の極限値は，実験的事実として計算を進めているが，このことは，つぎのようにして，

裏づけられる．すなわち（[4] 定理12.4参照），

$$A(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{k-1} y^{k-1} + R_k(y)$$

$$|R_k(y)| < C_k y^k, \quad y > 0$$

（必ずしもこの級数は，収束しなくてもよい，つまり漸近展開でもよい）ならば，　（$m \geqq n$）

$$A_{m,0} = A(r^m y_0), \quad A_{m,n+1} = \frac{A_{m,n} - r^{n+1} A_{m,n-1}}{1 - r^{n+1}}$$

とおいた列は，nがますほど早くa_0に収束する．じつは

$$A_{m,n} = a_0 + (-1)^n a_{n+1} r^{-n(n+1)/2} (r^m y_0)^{n+1} + O((r^m y_0)^{n+2})$$

である．

いまの例では，$\sigma_m = 2^m \sin^2(\pi/2^m)$ は，$y = (1/2^m)^2$ に対して，この形であり，mを１つますことは，$r = 1/4$ としたことに相当するから，順次の加速値の比は $1/4$, $1/4^2$, $1/4^3$, ... に近づき，上記の加速で，つぎつぎに主要項が消されてゆく．係数を評価すると，$A_{n,n}$ の誤差は，ほぼ $2^{-n(n+1)}$ となる．番号がずれていることを考慮に入れると，内外接の周の平均からはじめれば，正2^n角形までで $(n+1)(n+2)$ ビット（$n=10$ なら132ビット）分は求められるはずなので，40桁くらいはこれでだせる．

表１は単長（仮数部37ビット）で求めたものであるが，倍長（仮数部74ビット）で求めた結果を表２に示す．た

だし使用した計算機（TOSBAC 3400）のF書式は，11桁しか精度がなく，D書式ではみづらいので，専用の印刷プログラム（毎回10倍して整数部をとる方式）を自家用に作り，表2はそれによった．（1列に印刷したのを，切ってはりかえてある）．20桁しか印刷しなかったが，たぶん最後の値は，末位のビット近くまで正しくでているはずである．

この計算は四則，平方根など基本的な演算だけからなり，130ビットくらいでも，10回の反復で求められるから，4倍長システムの検査用として，実用価値があるのではないかと考える．

§4. 数値積分による計算

答にπを含むような積分は，はなはだ多いから，数値積分で，その近似値を求めることもできるはずである．しかしこのとき，積分と積分公式の選択が重要である．

もっとも直接的なのは

(7) $$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

であるが，$x=1$ が特異点（$|f'(1)|=\infty$）であるため，

表 2

4	4.00000000000000000000	外接
	2.82842712474619009760	内接
	3.21895141649746006506	平均
8	3.31370849898476039041	〃
	3.06146745892071817382	
	3.14554780560873224602	
16	3.18259787807452811058	〃
	3.12144515225805228557	
	3.14182939419687756057	
32	3.15172490742925609847	〃
	3.13654849054593926381	
	3.14160729617371154203	
64	3.14411838524590426274	〃
	3.14033115695475291231	
	3.14159356638513669579	
128	3.14222362994245684538	〃
	3.14127725093277286806	
	3.14159271060266752717	
256	3.14175036916896645910	〃
	3.14151380114430107632	
	3.14159265715252287058	

ACCERALATION
(平均値にもとづく)

2	3.14065426154946672475
	3.14158150010275391488
	3.14159248963883330746
	3.14159265106589837270
	3.14159265355050291592
	3.14159265358917989348
3	3.14159621865121652107
	3.14159266407591444067
	3.14159265362823273088
	3.14159265358994108628
	3.14159265358979381376
4	3.14159265013640344428
	3.14159265358726146006
	3.14159265358979091995
	3.14159265358979326623
5	3.14159265359063470277
	3.14159265358979339257
	3.14159265358979323849
6	3.14159265358979318712
	3.14159265358979326846
7	3.14159265358979326846

収束がはなはだ悪い．じっさいにやってみると，シンプソン公式により，17分点で 3.13439…，1025分点で 3.1415786…くらいにしかならない．積分域を 1/2までとし

$$\text{(8)} \qquad \pi = 6\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right]dx$$

とすると，65分点のシンプソン公式で 3.141592653 までは求められる．

(7)の端の特異点を消したり，変換したりする工夫も興味深いが，数値積分によるならば

$$\text{(9)} \qquad \pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

をシンプソン公式によるのがずっと早い．17分点で 3.1415926535 まででる．(9)は，たとえば[6]に示されているように，特性関数の零点が，被積分関数の極を打消している特異な例だから，πの計算にはよくても，数値積分の例には不適切である．またシンプソン公式の誤差が刻み巾の6乗（ふつうのように4乗でなく）に比例して減少するので，10桁くらいはすぐにでるが，20桁，30桁となると，容易ではない．

π自身ではないが，$\sqrt{\pi}$ をもとめるには

$$\text{(10)} \qquad \sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

を利用し，台形公式で求めるのが早いようである．刻み幅

0.5 で $x=7$ まで計算すると，17桁正しく求められる．しかもこのとき，e^{-x^2} の値は，$e^{-h^2}=a$ の値さえ求めれば，あとは漸化式で $a^4=a\times a^3$, $a^9=a^4\times a^5$, --- を順次作ってゆけばよい．

π^2, π^4 などを直接に求めるには，

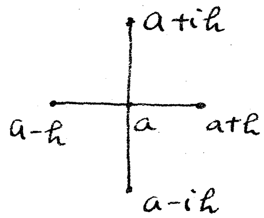
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

などに加速をほどこすのも，手軽な方法であろう．

§5. 複素分点をもつ積分公式

Čebyšev の積分公式は，$n=8$ および $n\geqq 10$ のとき，複素分点をもつ．しかし被積分関数が解析的なら，それでも使えるはずである．

[7]に複素4点（正しくは5点）公式がでている．



$$\int_{a-h}^{a+h} f(t)\,dt = \frac{h}{15}\Big[\,24f(a)$$

$$+4[f(a+h)+f(a-h)]-[f(a+ih)+f(a-ih)]\Big]$$

$$+h\,f^{(6)}\cdot(2h)^6/168\cdot 6! \qquad \text{累積誤差 } h^6$$

このまねをして6点（正しくは7点）公式を作ることができる．

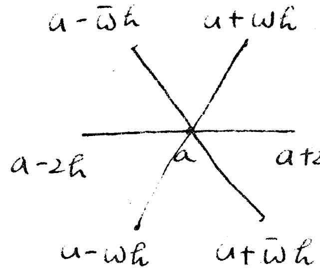
$$\int_{a-2h}^{a+2h} f(t)\,dt = \frac{2h}{315}\Big[540 f(a)$$

$$+71\left[f(a+h)+f(a-h)\right]$$

$$-(13+7\sqrt{3}i)\left[f(a+\omega h)+f(a-\omega h)\right]$$

$$-(13-7\sqrt{3}i)\left[f(a+\bar{\omega} h)+f(a-\bar{\omega} h)\right]\Big]$$

$$-h f^{(8)}(4h)^8/9!\cdot 4^7 \qquad \text{累積誤差 } h^8$$



$\omega = 1+\sqrt{3}i$

これらを $\int_0^1 \frac{4\,dx}{1+x^2} = \pi$ に応用してみた結果を下記に示す.
ただしこのプログラムは,複素数計算でなく,被積分関数の実部と虚部(の分子と分母)を別々の文関数に書き,すべて実数計算で,実数部のみを計算した.虚数部は互いにうち消しあう.計算は $[0,1]$ を何区間かに分け(じっさいはプログラムの都合上 6点公式では $n/4$ 個,他は $n/2$ 個),そのおのおのの小区間に上記の公式を使い,それを合計した.

表 3

$1/h=n$	4点	6点	SIMPSON(比較)
4	3.1416068375	3.1408969408	3.1415686274
8	3.1415927138	3.1415905153	3.1415925624
16	3.1415926543	3.1415926534	3.1415926511
32	3.1415926535	3.1415926536	3.1415926535

被積分関数の特異点±iが近すぎるせいか，誤差のへり方は，理論どおり$O(h^p)$の形でないので，これに加速してもうまくない．6点公式によると，$n=16$で十桁でるが，この公式は複雑で，係数も大きく，実用価値は疑問である．

何よりも，複素分点を有する積分公式を特に使う意義，利点が，私にはまだまったくわからない．――――

§6. むすび

以上はまだ思いつき程度にすぎず，せいぜいシステムのテスト用にしかならなかったが，このへんに，数値解析の演習問題がたくさんありそうである．計算方式の比較・選択にあたっては，たとえば10桁正しく求めるのに要する手間と，所要桁数がふえたときの手間のふえ方とは，区別して考える必要があるだろうし，πを10桁だすのに，どの方法がもっとも手間が少ないか，まだはっきりしない．

Exeter（イギリス）での第2回国際数学教育会議（1972年9月）の折に，アメリカのGrossmanが，(7)と(9)との収束の早さの差が，数値計算教育のよい材料であると論じていた．πの計算は，高校以下での計算教育のよい話題の一つとして，一つの試論をのべた次第である．

文献

[1] 一松 信, 教室に計算機をもちこもう. 第2部 3,4 —— 円周率 π の計算. 数学セミナー 1972年5月号 76－80 ; 6月号 48－52 .

[2] 藤原松三郎, 明治前日本数学史, 第二巻, 岩波 1956. —— 第3章 建部賢弘.

[3] 森口繁一, アルゴル漫歩－1. 円理論追試, 数学セミナー, 1964年4月号 16－21.

[4] P.Henrici, Elements of Numerical Analysis, Wiley, 1964.

[5] H.S.Wilf, Advances in numerical quadrature, — Mathematical Methods for Digital Computers, II, 1967, Wiley, 133-144.

[6] H.Takahasi & M.Mori, Error estimation in the numerical integration of analytic functions, Report of the Computer Centre, Univ. of Tokyo, 3 (1970), 41- 108.

[7] M.Abramowitz - I.A.Stegun ed., Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs, and mathematical tables, National Bureau of Standards, A.M.S. 55 (1964), (Dover 版の廉価版もある) —— §25.4.27, p.887.