数理解析研究所講究録
173巻 1973年 98-113

Local dynamical system の category について

神戸大 教養　木村郁雄

§1. 序

自励系 $dx_i/dt = f_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i = 1, \cdots, n)$ の位相的特徴は $n=2$ の場合 H. Poincaré, I. Bendixson によって詳しくかつ美事に解析されたが，近年自励系の理論は抽象化されて一般の位相空間内の力学系とか局所力学系といったものが定義されるに到り，力学系ひいては自励系の位相的性質が全く純粋な形において追求されている．

力学系のこのような位相的研究，すなわち位相的変換によって不変な性質の研究は次の意味でこれらの定性的研究の範疇に入ると考えられる．$\mathbb{C}$を力学系あるいは局所力学系の充分に広い class とそれらのある種の morphism よりなる category とする．このとき $\mathbb{C}$ の isomorphism に対して不変な性質を研究するということが $\mathbb{C}$ の定性的研究の一側面を表わすのではないだろうか．以下の結果はしたがって局

所力学系の定性的研究のための手段を与えるものであると思われる.

$\mathcal{C}$ の morphism としては大きく分けて二つの種類を考える. 一つは幾何学的な意味でのもので(NS-morphism と呼ぶ) 軌道を軌道(の中)に写す連続写像である. もう一つはこのような morphism のうち特に連続な reparametrization が可能であるものであって GH-morphism と呼ぶものである.

現在までには既に T. Ura [15], O. Hájek [6], D. G. Belanger [2], D. H. Carlson [3] によって導入された morphism があるが, ここではそれらを含むより一般な morphism をとりあげる. そのために category の object となるべき局所力学系の定義から始めたい([1], [8], [14], [15] 参照).

定義 1. X を位相空間, D を $X\times R$ 内の開集合で

$$D=\bigcup_{x\in X}\{x\}\times D_x$$

といった形で表わされているものとする. ここで D_x は R 上の開区間である: $D_x=(a_x, b_x)\ (a_x<0<b_x)$. 連続写像 $\pi: D\to X$ が次の公理系をみたすとき (X, D, π) または π は phase space X 上の <u>local (dynamical) system</u> であると言われる.

I. Identity axiom. $\pi(x, 0)=x,\ x\in X$.

II. Homomorphism axiom. $(x, t), (x, t+s),$

$(\pi(x,t),s)\in D \Rightarrow \pi(\pi(x,t),s)=\pi(x,t+s)$.

III. Non-extendability axiom. $b_x<\infty \Rightarrow L_\pi^+(x)=\phi$, また $a_x>-\infty \Rightarrow L_\pi^-(x)=\phi$. ここで $L_\pi^\pm(x)$ は $t\uparrow b_x$ (または $t\downarrow a_x$) のときの曲線 $\pi_x(t)$ の触点の集合とする.

定義2 (T. Ura [15, 16]). (X,D,π), (Y,E,ρ) を local system とする. 位相写像 $h:X\to Y$ に対して diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ C_\pi\downarrow & & \downarrow C_\rho \\ 2^X & \longrightarrow & 2^Y \end{array}$$

が可換ならば h は π から ρ への NS-iso であるという. ここで $x\in X$ のとき $C_\pi(x)$ は x を通る π の軌道 $\pi(x,D_x)$ を表わす. 同様に $C_\rho(y)$ は $y\in Y$ を通る ρ の軌道である.

定義3 ([15, 16]). (X,D,π), (Y,E,ρ) を global system すなわち $D=X\times R$, $E=Y\times R$ とする. 位相写像 $h:X\to Y$ と連続写像 $\varphi:D\to R$ に対して次の diagram が可換であるとする:

$$\begin{array}{ccc} X\times R & \xrightarrow{(h,\varphi)} & Y\times R \\ \pi\downarrow & & \downarrow\rho \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}, \quad (h,\varphi)(x,t)=(h(x),\varphi(x,t)).$$

さらに各 $x\in X$ に対して $\varphi(x,\cdot):R\to R$ が同相写像で $\varphi(x,0)$

$=0$ をみたすものとする．このとき (h,φ) は π から ρ への <u>GH-iso.</u> であるという．

GH-iso. に対して次の様な type を考える．

(0) $\varphi(x,\cdot): R \to R$ が体 R の同型写像のとき，すなわち $\varphi(x,t)=t$ のとき．

(1) $\varphi(x,\cdot): R \to R$ が x に無関係で加群 R の同型写像すなわち $\varphi(x,t)=c\cdot t$ $(c\neq 0)$ となるとき．

(2) $x \longmapsto \varphi(x,\cdot)$ が連続写像 $X \to L(R,R)$ (= vector space R の自己同型群) になるとき，すなわち (h,φ): $X\times R \to Y\times R$ が vector bundle iso. のとき．

<u>定義4</u> ([15, 16])．(X,D,π), (Y,E,ρ) が local system のときは定義3を拡張して，次の様な iso. を考える．各 $x\in X$, $y\in Y$ にそれぞれ開区間 D^*_x, E^*_y が与えられていて

$$D^*=\bigcup_{x\in X}\{x\}\times D^*_x \supset D, \quad E^*=\bigcup_{y\in Y}\{y\}\times E^*_y \supset E$$

であるとする．$h: X\to Y$ を位相写像，$\varphi: D^*\to R$ をある写像とする．各 $x\in X$ に対して $\varphi(x,\cdot)$ は D^*_x から $E^*_{h(x)}$ への位相写像であって $\varphi(x,0)=0$ をみたすとする．このとき次の diagram が可換ならば (h,φ) は π から ρ への <u>GH-iso.</u> であるという．可換という意味は $(x,t)\in D$ かつ $(h(x),\varphi(x,t))\in E$ ならば $h\circ\pi(x,t)=\rho(h(x),\varphi(x,t))$ がなりたつことである：

$$\begin{array}{ccc} D^* & \xrightarrow{(h,\varphi)} & E^* \\ \cup & & \cup \\ D & \xrightarrow{(h,\varphi)|D} & E \\ \pi\downarrow & & \downarrow\rho \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

<u>定理 1</u>(T. Ura [14]). $(h,\varphi):\pi\to\rho$ が GH-iso. ならば;各 $x\in X$ に対して $\varphi(x,\cdot)$ は D_x を $E_{h(x)}$ の上に写す同相写像である:すなわち $(h,\varphi)(D)=E$ がなりたつ.

<u>定義 5</u>(T. Ura [15]). GH-iso. $(h,\varphi):\pi\to\rho$ について次の <u>type</u> を考える:

(4.5) General GH-iso.

(4.25) φ は $D-S_\pi$ (S_π は π の特異点の集合) で連続.

(4) φ は D で連続.

(3.5) $D^*=X\times R$, $E^*=Y\times R$.

(3.25) type 3.5 かつ type 4.25.

(3) type 3.5 かつ type 4.

(2.5) type 3.5 であって $x\mapsto\varphi(x,\cdot)$ が $X\to L(R,R)$ の写像になるとき,すなわち $\varphi(x,t)=c(x)\cdot t$, $c(x)\neq 0$.

(2.25) type 2.5 であって,$c(x)$ が $X-S_\pi$ で連続.

(2) type 2.5 かつ $c(x)$ が連続.

(1) type 2 かつ $c(x)\equiv \text{const.}=c$.

(0) type 1 でとくに $c=1$.

系. $(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$

$$
\begin{array}{ccccc}
(2) & & (3) & & (4) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
(2.25) & \Rightarrow & (3.25) & \Rightarrow & (4.25) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
(2.5) & \Rightarrow & (3.5) & \Rightarrow & (4.5)
\end{array}
$$

定理2. $(h,\varphi):\pi\to\rho$ が GH-iso. ならば $h:X\to Y$ は π から ρ への NS-iso. である.

定理3 (T. Ura [15]). X, Y が Hausdorff のとき $(h,\varphi):\pi\to\rho$ が type $n.5$ であれば (h,φ) は type $n.25$ である.

定理4 (I. Kimura [9]). X, Y が T_1 ならば NS-iso. $h:\pi\to\rho$ に対して適当に $\varphi:D\to R$ を作れば $(h,\varphi):\pi\to\rho$ は GH-iso. になる.

§2. Morphism

D. G. Belanger [2] は global system π, ρ についてとくに $S_\rho=\phi$ のとき, 位相写像 $h:X\to Y$ が $h(C_\pi(x))\subset C_\rho(h(x))$, $x\in X$ をみたせば, 連続な $\varphi:X\times R\to R$ が存在して $h\circ\pi(x,t)=\rho(h(x),\varphi(x,t))$ となることを示した.

また D. H. Carlson [3] は local system に対して上述の h として連続写像をとり, φ が type 0 の morphism を扱っている. これらのことを考慮して次の様な morphism を導入する.

定義6. π, ρ を local system, $h:X\to Y$ を連続写像

とする．$h(C_\pi(x))\subset C_\rho(h(x))$, $x\in X$ がなりたつとき h は π から ρ への <u>NS-mor.</u> であるという．

また連続写像 $h: X\to Y$ と写像 $\varphi: D\to R$ が次の条件をみたすとき (h,φ) は π から ρ への <u>GH-mor.</u> であるという：

I．各 $x\in X$ に対して $\varphi(x, D_x)\subset E_{h(x)}$ かつ $\varphi(x,\cdot)$ は連続．

II．$\varphi(x,0)=0$, $x\in X$．

III．$h\circ\pi(x,t)=\rho(h(x),\varphi(x,t))$, $(x,t)\in D$．

GH-mor. (h,φ) の type わけは iso. の場合と同様に可能である．φ の連続性は type n.25 に対しては $h^{-1}(S_\rho)\times R$ を除いて要求する．

<u>定理5.</u> $h:(X,D,\pi)\to(Y,E,\rho)$ が NS-mor. であって Y が Hausdorff ならば適当な $\varphi: D\to R$ をとれば (h,φ) は π から ρ への GH-mor. になる．

<u>定理6.</u> $(h,\varphi):(X,D,\pi)\to(Y,E,\rho)$ が GH-mor. であって Y が Hausdorff ならば (h,φ) は type 4.25 である．

これの証明には T. Ura [15] の方法がそのまま使われる．

<u>定義7.</u> (h,φ), $(k,\psi):(X,D,\pi)\to(Y,E,\rho)$ を GH-mor. とする．$h=k$ かつ $\varphi(x,t)=\psi(x,t)$, $(x,t)\in D-h^{-1}(S_\rho)\times R$ のとき $(h,\varphi)\sim(k,\psi)$ であるとして，この同値関係による同値類が一つの morphism, <u>GH'-mor.</u> を定義すると考える．

(h,φ) が type n のときは，それにより表わされる GH'-mor. は type n であるという.

§3. Local system および morphism の局所化.

この節以後は簡単のため相空間はすべて Hausdorff とする.

定理 7 (T. Ura [15, 16]). (X, D, π) を local system, $U \subset X$ を開集合とする. 各 $x \in X$ に対して D_x^0 によって $0 \in D_x^0 \subset D_x$, $\pi(x, D_x^0) \subset U$ をみたす最大の開区間を表わす.

$$D|U = \cup_{x \in U} \{x\} \times D_x^0$$

は D の開部分集合であり $(U, D|U, \pi|U)$ $(\pi|U = \pi|(D|U))$ は local system である. $\pi|U$ は π の U への restriction といわれる.

定理 8. (X, D, π), (Y, E, ρ) $(X = Y)$ を local system とする. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が X の開被覆で $\pi|U_\alpha = \rho|U_\alpha$, $\alpha \in A$ であるとする. このとき $\pi = \rho$ である.

定理 9. $h: (X, D, \pi) \to (Y, E, \rho)$ を NS-mor., $U \subset X$ を開集合とする. このとき $h|U: \pi|U \to \rho$ は NS-mor. である.

定理 10. $(h, \varphi): (X, D, \pi) \to (Y, E, \rho)$ を type n の GH-mor. とする. $U \subset X$ が開集合ならば $(h|U, \varphi|U): \pi|U \to \rho$ はやはり type n である $(\varphi|U = \varphi|(D|U))$.

系. $\lambda: \pi \to \rho$ が type n の GH'-mor. ならば, 開集合

$U \subset X$ に対して type n の GH'-mor. $\lambda|U : \pi|U \to \rho$ を一意的にきめることができる.

定義8. $h|U$, $(h,\varphi)|U \equiv (h|U, \varphi|U)$, $\lambda|U$ はそれぞれ h, (h,φ), λ の U への restriction といわれる.

定理11. (X,D,π), (Y,E,ρ) を local system, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の開被覆, $\{h_\alpha : \pi|U_\alpha \to \rho\}_{\alpha\in A}$ を

$$h_\alpha|U_\alpha \cap U_\beta = h_\beta|U_\alpha \cap U_\beta, \quad \alpha, \beta \in A$$

をみたす NS-mor. の族とする. このとき $h|U_\alpha = h_\alpha$, $\alpha \in A$ によってきまる写像 $h : X \to Y$ は π から ρ への NS-mor. である. さらにこのような NS-mor. は一意的にきまる.

補題1. 定理11は type 0, 2, 2.25, 2.5 の GH-mor. に対して同様になりたつ. GH'-mor. に関しては type number n が次の場合になりたつ.

(1) $n = 0, 2.25, 2.5, 4.25, 4.5$.

(2) X が normal ならば $n=2$ でもよい.

(3) D が normal ならば $n=4$ でもよい.

補題2. $(h,\varphi) : (X,D,\pi) \to (Y,E,\rho)$ を type n の GH-mor. $V \subset Y$ が開集合で $h(X) \subset V$ であるとする. このとき $(h,\varphi) = (i_\rho|V) \circ (k,\psi)$ をみたすような type n の GH-mor.

$$V|(h,\varphi) = (k,\psi) : \pi \to \rho|V$$

がただ一つ存在する. この場合 $k = V|h$, $\psi = V|\varphi$ である.

系. GH'-mor. および NS-mor. に対しても補題2がなりたつ.

§4. Local system の category.

$\mathcal{H}$ を Hausdorff 空間上の local system の class とし category NS を $\mathrm{obj}\,NS = \mathcal{H}$, $\mathrm{mor}\,NS = \{\mathcal{H}$ の元の間の NS-mor.$\}$ によって定義する. また各 type number n に対して

$\mathrm{obj}\,GH(n) = \mathrm{obj}\,GH'(n) = \mathcal{H}$,

$\mathrm{mor}\,GH(n) = \{\mathcal{H}$ の元の間の type n の GH-mor.$\}$

$\mathrm{mor}\,GH'(n) = \{\mathcal{H}$ の元の間の type n の GH'-mor.$\}$

によって category $GH(n)$, $GH'(n)$ を作る.

定理12. 自然な写像 $T: \mathrm{mor}\,GH \to \mathrm{mor}\,NS$ $(T((h, \varphi)) = h)$ は GH から NS への functor である. 同様に次の canonical な functor がえられる:

$$U': NS \to GH', \quad T': GH' \to NS, \quad S: GH \to GH'.$$

これらの functor については

(1) $T' \circ S = T$

(2) $T' \circ U' = i_{NS}$, $U' \circ T' = i_{GH'}$. すなわち T', U' は GH' と NS の間の iso. である.

註) 定理6により $GH(n.5) = GH(n.25)$, $GH'(n.5) = GH'(n.25)$ である. 定理12 では $GH(4.5) = GH$, $GH'(4.5) = GH'$ と略記した.

次にこれらの category が Cartan-Eilenberg[4]の意味で local category になるかどうかを検討する.

Δ を位相空間とそれらの間の連続写像からなる category, Ω を NS, $GH(n)$, $GH'(n)$ のどれか一つと考える. そこで L: $\Omega \to \Delta$ を自然な functor として $\{\Omega, \Delta, L\}$ に対して次の4命題を考える:

1) $(X, D, \pi) \in \mathcal{U}$ で $U \subset X$ が開集合ならば π の restrict. $\pi|U$ と inclusion mor. $i_\pi|U : \pi|U \to \pi$ は category Ω において well-defined.

2) $(X, D, \pi), (Y, E, \rho) \in \mathcal{U}$, $X = Y$ とする. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が X の開被覆で $\pi|U_\alpha = \rho|U_\alpha$, $\alpha \in A$ ならば $\pi = \rho$.

3) $(X, D, \pi), (Y, E, \rho) \in \mathcal{U}$ で $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の開被覆とする. $\{\omega_\alpha : \pi|U_\alpha \to \rho\}_{\alpha \in A} \subset mor\,\Omega$ が

$$\omega_\alpha | U_\alpha \cap U_\beta = \omega_\beta | U_\alpha \cap U_\beta, \quad \alpha, \beta \in A$$

をみたせば $\omega|U_\alpha = \omega_\alpha$, $\alpha \in A$ となる $\omega \in mor\,\Omega$ がただ一つ存在する.

4) $(X, D, \pi), (Y, E, \rho) \in \mathcal{U}$ で $\omega : \pi \to \rho$ を Ω の mor. とする. 開集合 $V \subset Y$ に対して $L(\omega) = h$ が X を V の中に写すならば $\omega = (i_\rho|V) \circ \kappa$ をみたす $\kappa \in mor\,\Omega : \pi \to \rho|V$ がただ一つ存在する.

条件 1)～4) は Cartan-Eilenberg の意味で $\{\Omega, \Delta, L\}$ が

local category になるための条件に外ならない．これらがみたされるとき単に Ω は local category であるということにする．

定理13．NS, GH(n), GH′(m) は local category である．ただし $n=0,2,2.25,2.5$, $m=0,2.25,2.5,4.25,4.5$.

註）type 0 については D.H. Carlson [3] が証明している．

定義9．$\mathcal{CN}$ を completely normal な空間上の local system の class として GHCN′(2) を次の様にして作る：

obj GHCN′(2) $= \mathcal{CN}$,

mor GHCN′(2) $=$ {$\mathcal{CN}$ の元の間の type 2 の GH′-mor.}

つぎに $\mathcal{DCN}$ を D が comp. normal な local system $(X;D,\pi)$ の class として次の様に GHDCN′(4) を作る：

obj GHDCN′(4) $= \mathcal{DCN}$,

mor GHDCN′(4) $=$ {$\mathcal{DCN}$ の元の間の type 4 の GH′-mor.}

定理14．GHCN′(2), GHDCN′(4) は local category である．

註）位相空間 M に対して次の命題を考える：

(M)　M の任意の閉集合 F に対して，F 上の任意の連続関数は M 上の連続関数に拡張される．

そうすると補題1によってさらに広い category GHM′(2), GHDM′(4) を以下のようにして作るとこれらはやはり local category である：

$obj\, GHM'(2) = \mathfrak{M}$,

$mor\, GHM'(2) = \{\mathfrak{M}$ の元の間の type 2 の GH'-mor.$\}$,

$obj\, GHDM'(4) = \mathfrak{D}\mathfrak{M}$,

$mor\, GHDM'(4) = \{\mathfrak{D}\mathfrak{M}$ の元の間の type 4 の GH'-mor.$\}$.

ここで $\mathfrak{M}$（または $\mathfrak{D}\mathfrak{M}$）は X（または D）の任意の部分開集合が性質 (M) をもつような local system (X, D, π) の class を表わす.

最后に特異点のない local system の category を調べる.

<u>定義 10.</u> $\mathfrak{R}$ を Hausdorff 空間上の特異点をもたない local system の class とする. このとき次の様に category NSR, $GHR(n)$ $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ を作る：

$obj\, NSR = obj\, GHR(n) = \mathfrak{R}$,

$mor\, NSR = \{\mathfrak{R}$ の元の間の NS-mor.$\}$,

$mor\, GHR(n) = \{\mathfrak{R}$ の元の間の type n の GH-mor.$\}$.

<u>定理 15.</u> NSR, $GHR(n)$ $(n = 0, 2, 4)$ は local category である.

文　献

[1] S. Ahmad : On Ura's Axioms and Local Dynamical Systems, Funkc. Ekvac., 12 (1969), 181–191.

[2] D. G. Belanger: Continuous Reparametrizations of Dynamical Systems, Funkc. Ekvac., 14(1971), 123-128.

[3] D. H. Carlson: Extensions of Dynamical Systems via Prolongations, Funkc. Ekvac., 14(1971), 35-46.

[4] S. Eilenberg: Foundations of Fiber Bundles, Univ. of Chicago, 1957.

[5] W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund: Topological Dynamics, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1955.

[6] O. Hájek: Categorial Concepts in Dynamical System Theory, Topological Dynamics, An International Symposium, Benjamin, New York 1968, 243-258.

[7] O. Hájek: Local Characterization of Local Semi-dynamical Systems, Math. Syt. Theory 2 (1968), 17-25.

[8] O. Hájek: Dynamical Systems in the Plane, Academic Press, London and New York, 1968.

[9] I. Kimura: Isomorphisms of Local Dynamical Systems and Separation Axioms for Phase Spaces, Funkc. Ekvac., 13(1970), 23-34.

[10] K. Kuratowski: Topology II (English tr.), Academic Press, New York and London, 1968.

[11] R.C. MacCann: A Classification of Centers, Pacific Jour. Math., 30 (1969), 733-746.

[12] V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov: Qualitative Theory of Differential Equations (English tr.), Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1960.

[13] T. Ura: Local Isomorphisms and Local Parallelizability of Dynamical Systems, Dynamical Systems, An International Symposium, Benjamin, New York, 1968, 493-506.

[14] T. Ura: Local Isomorphism and Local Parallelizability in Dynamical Systems Theory, Math. Syst. Theory, 3 (1969), 1-16.

[15] T. Ura: Isomorphisms and Local Characterization of Local Dynamical Systems, Funkc. Ekvac., 12 (1969), 99-122.

[16] T. Ura: Local Dynamical Systems and Their Isomorphisms, Japan-United States Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag,

Berlin, Heidelberg and New York, 243 (1971), 76-90.

[17] I. Kimura: Categories of Local Dynamical Systems (投稿中).