数理解析研究所講究録
173巻 1973年 74-88

Anosov Diffeomorphisms

名大 教養 白岩 謙一

§0 はじめに

Mを境界を持たない，C^∞級微分可能多様体とする。（以下特にことわらない限り，このような多様体だけを考える。）いま$f: M \longrightarrow M$をC^r級微分同相写像（$r \geq 1$）とする。このとき，(M, f)または単にfを，微分可能な力学系，または単に力学系という。Mの点xに対して，その軌道$orb(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$，（ここで$\mathbb{Z}$は整数全体の作る加群）が考えられるが，この軌道の大域的な状態を，位相的に研究するのが主な目的である。

軌道の状態としては，例えば$orb(x)$が有限集合のとき，即ち$f^n(x) = x$となる自然数が存在するとき，xを周期点といい，nをその周期という。特に，$n=1$となるとき，xを不動点という。不動点全体の集合を$Fix(f)$，周期点全体の集合を$Per(f)$とおく。すると$Per(f) = \bigcup_{n \geq 1} Fix(f^n)$となる。

次に点 $x \in M$ が非遊走的とは，x の任意の近傍 U に対して，適当な零でない整数 n があって，$f^n(U) \cap U \neq \phi$ となることをいう。非遊走的な点全体の集合を $\Omega(f)$ で表わすが，これは M の閉集合である。

2つの力学系 $f: M \to M$，$g: N \to N$ が位相的に共役とは，適当な同相写像 $h: M \to N$ が存在して，$h \circ f = g \circ h$ が成立するときをいう。位相的に共役なら，f と g の軌道の状態は，位相的には同じである。とくに $Fix(f^n)$ と $Fix(g^n)$，$Per(f)$ と $Per(g)$，$\Omega(f)$ と $\Omega(g)$ 等は，h によって同相となる。

微分可能な力学系の中で，特に重要なものとして Anosov の力学系，Morse-Smale の力学系，これらを含むものとして Axiom A（Smale による）を満たすもの等がある。

Anosov の力学系は，1960 年代に Anosov による負曲率空間上の測地流の研究に端を発し，その後エルゴート理論の専門家たち，Arnold，Avez，Sinai らによって U-力学系 C-力学系の名前で研究された。そして，Smale，Franks，Newhouse らによって，その力学系としての構造が位相的に研究された。

しかしながら，一般的には，Anosov の力学系について，余り良くわかっていない。例えば，どのような多様体の上に，

Anosov の力学系が存在するかとか，ある力学系がAnosovの力学系となるための条件を位相的に判定するにはどうしたらよいか，等の問題に関して，Franks とか Hirsch 等の仕事がある位である。

ここでは，今まで Anosov の力学系に関して得られた主要な結果と，いろいろの予想とか問題を解説し，さらに著者の得た二三の結果を報告することにする。

§1 Anosovの力学系の定義と例

Mをリーマン多様体，$f: M \to M$をC^1級微分同相写像とする。fの微分 Tfは，Mの接ベクトル束$T(M)$の自己同型を引き起こす。いま$T(M)$が2つのTf不変な部分ベクトル束E^uとE^sの Whitney 和に分かれ，すなわち

$$T(M) = E^u \oplus E^s, \qquad Tf(E^u) = E^u, \quad Tf(E^s) = E^s,$$

さらに，定数$c > 0$，$\lambda > 1$が存在して，全ての自然数nに対して

$$|Tf^n(v)| \geq c\lambda^n |v|, \quad v \in E^u,$$
$$|Tf^n(v)| \leq c^{-1}\lambda^{-n} |v|, \quad v \in E^s,$$

（ここで $|\cdot|$ は接ベクトルの長さ）が成立するとき，fを Anosov 微分同相写像，または Anosov の力学系という。

定義から直ちに，次の2つの命題がわかる。

命題1　$f: M \to M$がAnosovの力学系なら，零でない任意の整数nに対して$f^n: M \to M$もAnosovの力学系であ

る。

命題2　$\tilde{M}$をMの被覆空間，$p:\tilde{M}\to M$をその被覆写像とする。今$f:M\to M$，$\tilde{f}:\tilde{M}\to\tilde{M}$をそれぞれ$C^1$級の微分同相写像で$p\tilde{f}=fp$を満たすものとする。このとき，fがAnosovの力学系なら，$\tilde{f}$もAnosovの力学系となる。

さらにMがコンパクトなら，次の命題も容易にわかる。

命題3　Mがコンパクトなら$f:M\to M$がAnosovの力学系であるという条件は，Mのリーマン計量のとり方に無関係である。

またMather [8] により，次の命題も知られている。

命題4　Mのリーマン計量を適当に取りかえることによって，Anosovの力学系の定義の中の定数Cを1に出来る。

さて，ここで今まで知られているAnosovの力学系の例を全てあげることにする。3つの例をあげるが，これらは次々に拡張となっている。

例1　R^nをn次元数ベクトル空間，Z^nをその成分が全て整数からなるベクトル全体の作る部分加群とする。n次元トーラスT^nは$T^n=R^n/Z^n$と定義されるが，これは，1次元球面S^1（円周）のn個の直積空間$\overbrace{S^1\times\cdots\times S^1}^{n個}$と同一視出来る。

いまfをn次正方行列で，その成分は全て整数からなり，

さらに，その行列式の値 $\det f$ が ±1 とする。すると，f は $\mathbb{R}^n$ の自己同型で $f(\mathbb{Z}^n)=\mathbb{Z}^n$ をみたすものと考えられる。従って，自然に $T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ の自己同型 $\bar{f}: T^n\to T^n$ を引き起こす。

一般に $\mathbb{R}^n$ の自己同型 $g: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ の固有値の絶対値が全て 1 と異なるとき，f を双曲型という。

命題5　$f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ が上の条件をみたし，さらに双曲型なら，$\bar{f}: T^n\to T^n$ は Anosov の力学系である。

このような $\bar{f}$ を hyperbolic toral automorphism という。

例2. N を単連結で巾零なリー群とする。今 Γ を N の uniform discrete 部分群，すなわち N/Γ がコンパクトとなるような discrete 部分群とする．今 $h: N\to N$ が N の自己同型で，$h(\Gamma)=\Gamma$ を満たすものとする．すると これは $\bar{h}: N/\Gamma\to N/\Gamma$ なる微分同相写像を引き起こす。この N/Γ を nilmanifold という。すると例1の拡張として，次の命題が成立する．

命題6　上の仮定のほかに，N の単位元 e における h の微分 $Th_e: T_e(N)\to T_e(N)$ が双曲型なら，$\bar{h}: N/\Gamma\to N/\Gamma$ は Anosov の力学系である。

このような $\bar{h}$ を hyperbolic nilmanifold automorphism という。

例3　N を単連結で巾零なリー群，K を N の自己同型の作

る有限群とする。いま $N\cdot K$ をその半直積とする。すなわち，(x,a), $x\in N$, $a\in K$ の形の元全体の集合に $(x,a)(y,b)=(xa(y),ab)$ によって積を定義することによって得られる群とする。$\Gamma\subset N\cdot K$ を Torsion を持たない uniform discrete 部分群とする。すると Auslander によれば，([2])

(1) $\Gamma\cap N$ は N の uniform discrete 部分群，

(2) $\Gamma/\Gamma\cap N$ は有限．

がわかっている。

$N\cdot K$ の中での K の右剰余類全体の作る空間 $N\cdot K/K=\{gK \mid g\in N\cdot K\}$ は自然に N と微分同相となる。これに Γ は left translation として作用するが，その作用による商空間を N/Γ とおく。(又は $\Gamma\backslash N\cdot K/K$) するとこれはコンパクトで

(3) $N/\Gamma\cap N$ は N/Γ の有限被覆空間

が成立する，この N/Γ を infranilmanifold という。

いま $f: N\cdot K\to N\cdot K$ を自己同型写像で $f(\Gamma)=\Gamma$, $f(N)=N$ をみたすものとすると，これは $\bar{f}: N/\Gamma\to N/\Gamma$ を引き起こす。このとき次の命題が成立する。

命題7　$f|N$ の単位元における微分が双曲型なら，$\bar{f}: N/\Gamma\to N/\Gamma$ は Anosov の力学系となる。

このようにして出来た $\bar{f}$ を hyperbolic infranilmanifold automorphism という。

§3　今までの結果（Anosovの仕事を中心として）

MのC^r級微分同相写像全体の集合に，C^r位相を入れて出来る位相空間を$\mathrm{Diff}^r(M)$とする。Anosovによる主定理は次のものである。

Anosovの定理　Mをコンパクトとすると

(1)　$f:M\to M$がAnosovの力学系なら，fはstructurally stable。即ちfの$\mathrm{Diff}^r(M)$における適当な近傍Uがあって，Uに属する任意の$g:M\to M$はfと位相的に共役である。

(2)　さらにfが，Mのリーマン計量によるルベーグ測度と同値なf不変な測度を持てば，$\mathrm{Per}(f)$はMで稠密である。

(3)　さらにfがC^2級なら，fはエルゴード的，即ちMはf不変で測度が正となる2つの部分集合の直和となることはない。

(4)　C^r級のAnosov力学系全体の集合は$\mathrm{Diff}^r(M)$の開集合である。$(r\geqq 1)$。

この定理を関数解析的な手法を用いて証明するとき，§2で述べたのと別のAnosov力学系の特長づけが用いられる。これは次のように述べることが出来る。

M上の連続なベクトル場全体の作るベクトル空間にsup normを入れてBanach空間とする。これを$\Gamma(T(M))$で表わす。いま$f^*:\Gamma(T(M))\longrightarrow\Gamma(T(M))$を，

$$f^*(\xi)=Tf\circ\xi\circ f^{-1}$$

で定義すると，これは連続な線型写像である。これらを複素化したものも同じ記号を用いて表わすことにすると，

命題8　f^* の spectrum を $\sigma(f^*)$ とする。即ち $\sigma(f^*)=\{\lambda\in\mathbb{C} \mid f^*-\lambda I$ が $\Gamma(T(M))\otimes\mathbb{C}$ の自己同型でない$\}$，但し $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合。すると，次の3つの命題は同値。

(a)　$1\notin\sigma(f^*)$

(b)　$|\lambda|\neq 1$ なら $\lambda\notin\sigma(f^*)$

(c)　f は Anosov の力学系

証明は Mather [8] を参照のこと。

さてこの Anosov の定理に関連して，Small は [12] の中で，次の3つの問題を提出した。

問題1　M がコンパクト，$f: M\longrightarrow M$ を Anosov 力学系とするとき，$\Omega(f)=M$ となるか？

これは $\overline{Per(f)}=\Omega(f)$ が分かっているから（[4]），これは $Per(f)$ が M で稠密か？という問題と同値である。

問題2　Anosov 力学系は不動点をもつか？

問題3　M がコンパクトとし $\Omega(f)=M$ となる Anosov 力学系全体の位相的共役類を決定せよ。特に，Anosov 力学系をもつようなコンパクト多様体 M はどんなものか？又この M の普遍被覆空間はユークリッド空間か？

これに関して Avez は [3] で f に対して M の連続な f 不

変な測度 $\mu > 0$ が存在すれば，Mの普遍被覆空間は，ユークリッド空間となることを証明した。

さらに大胆な予想として，次のものがある。

「予想」 コンパクト多様体上のAnosov力学系は，hyperbolic infranilmanifold automorphism と位相的に共役.

§4 今までの結果（Franksを中心として）

$f: M \to M$ をコンパクトな多様体M上の C^∞ 級微分同相写像とする。いま有限CW複体Kの同相写像 $g: K \to K$ と写像(連続) $h: K \to M$ が，次の条件をみたすよう，任意に与えられている。即ち $\pi_1(M)$ 等をMの基本群，$g_*: \pi_1(K) \to \pi_1(K)$ 等をgの基本群へ引き起こす準同型写像とするとき

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(K) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(M) \\ g_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \pi_1(K) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(M) \end{array}$$

が可換，即ち $f_* h_* = h_* g_*$

このとき，hにホモトピックで基点を保つ写像 $h': K \to M$ で $f \circ h' = h' \circ g$ をみたすものが唯1つ存在するような f を，π_1-微分同相写像という。

さらに，2つの微分同相写像 $f: M \to M$, $g: N \to N$ が π_1-共役とは，適当な同型写像 $\phi: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ があって，

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(N) \\ f_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ \pi_1(M) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1(N) \end{array}$$

が可換となるときをいう。

Franks [4] の主定理は次のようになる。

Franksの定理 (1) hyperbolic infranilmanifold automorphism は π_1-微分同相写像である。

(2). $f: M \to M$ が $\dim E^u = 1$ 又は $\dim E^s = 1$ をみたし，$\Omega(f) = M$ となるような Anosov 力学系とすると，f は hyperbolic toral automorphism と位相的に共役.

(3) $f, g: M \to M$ が上の (2) の条件を満たす2つの Anosov 力学系とすると，f, g が位相的に共役となるための必要十分条件は，それらが π_1-共役となることである。

その後 Newhouse が [9] で $\dim E^u = 1$ 又は $\dim E^s = 1$ をみたす Anosov 力学系（余次元1の Anosov 力学系という。）に関して次の定理を証明した。

Newhouse の定理　余次元1の Anosov 力学系 f に対して

$$\Omega(f) = M$$

従って Franks の定理の (2)，(3) において，$\Omega(f) = M$ の条件は不要となった。

さらに Anosov の定理と Sinai の結果 [11] を合わせて次の結果がある。

定理（Anosov と Sinai）Anosov 力学系 f に対して，f 不変なルベーグ測度が存在するための必要十分条件は，$\overline{Per(f)} = M$ となることである。

これらと $\overline{Per(f)}=\Omega(f)$ が Anosov 力学系で成立することを組合わせると，次の結果がわかる。

(a) 余次元1の Anosov 力学系 f に対して $Per(f)$ は M で稠密，さらに f は不変なルベーグ測度をもち，エルゴート的である。

(b) $\dim M \leqq 3$ なら，M 上の Anosov 力学系は余次元1となるから，(a)が成立する。そして hyperbolic toral automorphism と位相的に共役である。

§5 Anosov 力学系を持たない多様体

Franks は [5] で次の定理を得た。

定理 $f: T^n \to T^n$ を Anosov 力学系とする。このとき，$H_1(T^n, R)$ を T^n の実数係数の1次元ホモロジーとし，$f_*: H_1(T^n, R) \to H_1(T^n, R)$ を f の引きおこす同型写像とする。すると f_* は1の巾根を固有値として含まない。

この定理を Hirsch [6] は次のように拡張した。

Hirsch の定理 M がコンパクトな多様体，$f: M \to M$ が Anosov 力学系とする。今 $\pi_1(M)$ が index 有限の polycyclic 部分群をもち，その普遍被覆空間 $\tilde{M}$ のホモロジー $H_*(\tilde{M}; R) = \bigoplus_{i \geqq 0} H_i(\tilde{M}, R)$ が有限次元なら，$f_*: H_1(M, R) \to H_1(M, R)$ は1の巾根を固有値として含まない。

これらを利用して Hirsch は Klein の管とトーラスの直積

とか，その他沢山のAnosov力学系を含まない多様体の例を作った。

我々は，ここで次の定理を示す。

定理1　Mを連結でコンパクトとする。$f: M \to M$ がAnosov力学系とすると，$f_*: H_*(M;\mathbb{R}) \to H_*(M;\mathbb{R})$ は恒等写像でない。

この証明は，もし f_* が恒等写像なら，f のLefschetz数を考えることによって $\Omega(f) = \mathrm{Per}(f)$ が有限集合となることを示す。すると，これはMorse-Smaleの力学系となるが，Anosov且つMorse-Smaleということはないので，矛盾となる。

この定理から直ちにまとして

系1　M, f を定理1のものとすると，零でない任意の整数 n に対して $f_*^n: H_*(M;\mathbb{R}) \to H_*(M;\mathbb{R})$ は恒等写像とならない。

これは，Franks, Hirschより弱い結果である。しかし，Mはもっと一般的である。

系2．有理数係数のホモロジー球面，特にホモトピー球面はAnosov力学系を持たない。

系3　レンズ空間，実射影空間はAnosov力学系を持たない。

MからMへのホモトピー同値のホモトピー類全体のなす群

を $\mathcal{E}(M)$ とする。 $H_*(M;\mathbb{Z})$ に恒等写像を引き起こすような M のホモトピー同値のホモトピー類全体 $\mathcal{E}_0(M)$ は $\mathcal{E}(M)$ の正規部分群で, $\mathcal{E}(M)/\mathcal{E}_0(M)$ は $\mathrm{Aut}(H_*(M,\mathbb{Z}))$ の部分群と同一視される。

系4 M はコンパクトで連結とし $\mathcal{E}(M)/\mathcal{E}_0(M)$ が有限とする。すると M は Anosov 力学系を持たない。

系5 $\mathrm{Aut}(H_*(M;\mathbb{Z}))$ が有限なら, M は Anosov 力学系を持たない。

系6 実数体, 複素数体, 4元数体上の射影空間, Cayley 射影平面は Anosov 力学系を持たない.

系7 偶数次元球面 S^{2n} の2個の直積 $S^{2n}\times S^{2n}$ は Anosov 力学系を持たない。

これは Kahn [7] により $\mathcal{E}(S^{2n}\times S^{2n})$ が有限だから。

最後に, M の R 係数のコホモロジー環が, 奇数次元の球面の積 $S^{n_1}\times\cdots\times S^{n_k}$, ($n_i$ は奇数)のそれと同型とする。例えば, コンパクトなリー群はこの性質をみたす。

今正の次元のコホモロジー類の積で生成される $H^*(M;R)$ の元を decomposable というが, このような元全体の作る部分群を D とし $P=\bigoplus_{i>0} H^i(M;R)/D$ とおく。f を M から M への写像とすると D は f^* で保たれるから, f は P の中の準同型 $f_P: P\to P$ を引き起こす。

定理2 Mを上の性質をみたすコンパクト多様体，$f: M \to M$ をAnosov力学系とする。このとき f_p は1の巾根を固有値として含まない。

これは，f_p の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ とするとき，f のLefschetz数 $L(f)$ が $\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i)$ となることを用いて証明できる。

系1 コンパクトなリー群Gに対して，$f: G \to G$ をAnosov力学系とする，すると $f_*: H_1(G; R) \to H_1(G; R)$ は1の巾根を固有値に持たない。

これはFranksの定理の拡張である．

系2 $H^*(M; R) \cong H^*(S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}; R)$ (n_i 奇数) であって，適当な n_{i_0} に対して $n_i \neq n_{i_0}$ ($\forall i \neq i_0$ のとき) が成立すれば，MはAnosov力学系を持たない。

系3 $Spin(n)$，$SU(n)$，$Sp(n)$，例外リー群 G_2，F_4，E_6，E_7，E_8 はAnosov力学系を持たない。

系4 定理2の仮定の下でAnosov力学系 $f: M \to M$ は不動点をもつ．

これはSondowの結果の拡張である。([13])

参考文献

1. D. V. Anosov: Geodesic flows on compact Rieman manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Math. Inst. 90 (1967)
2. L. Auslander: Bieberbach's theorem on space groups and discrete

uniform subgroups of Lie groups, Ann. of Math. 71 (1960). 579-590
3 A. Avez: Anosov diffeomorphisms, Auslander, Gottschalk: Topological Dynamics. Benjamin (1968), 17-51
4 J. Franks: Anosov diffeomorphisms, Proc. Symp. Pure Math. 14 AMS (1970), 61-94
5 " : Anosov diffeomorphisms on tori, Trans. AMS 145 (1969), 117-124
6 M.W. Hirsch: Anosov maps, polycyclic groups and homology, Topology 10 (1971), 177-183
7 P.J. Kahn: Self-equivalences of (n-1)-connected 2n-manifolds, Bull. AMS 72 (1966), 562-566
8 J.N. Mather: Characterization of Anosov diffeomorphisms. Indagationes Math. 30 (1968), 479-483
9 S.E. Newhouse: On codimension one Anosov diffeomorphisms, Amer. J. Math. 92 (1970) 761-770
10. Z. Nitecki: Differentiable Dynamics. M.I.T. Press. (1971)
11. Ja. G. Sinai: Markov Partitions and C-diffeomorphisms, Funct. Analy. and its Appl. 2 (1968), 61-82.
12 S. Smale: Differentiable Dynamical Systems, Bull. AMS 73 (1967) 747-817
13. J. Sondow: Fixed points of Anosov diffeomorphisms of certain manifolds, Notices AMS. 17 (1970), 414.