

コンパクトな力学系の分解について

東大 教養 齊藤 利弥

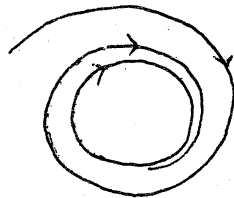
§1. Motivation

2次元球面 S^2 を相空間とする力学系に対しては、有名な Poincaré - Bendixson の理論がある。

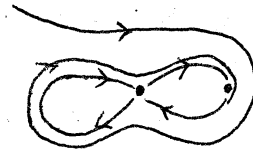
この理論によればまず、このような力学系の minimal set は特異点か周期軌道である。これらの minimal set がすべて互に孤立している（したがって個数は有限）としよう。

このとき、すべての軌道は空でない limit set をもち、それらは

- (1) 特異点、または周期軌道であるか、または
- (2) $n < \infty$ 個の特異点と、それをつなぐ特異点でない軌道とからつくられる閉曲線である。



(1)



(2)

したが、 S^2 上の力学系においては、そのコンパクトな不変集合のうちで、特に limit set に成り得るものを全部とり出してみると、それは (1) か (2) かのどちらかになる。そこでそのようなコンパクトな不変集合を全部とり出してその和集合 N をつくと、はじめの力学系は

- 1) N 上の力学系 2) $S^2 - N$ 上の力学系

の二つに分解される。このうち 2) の方はコンパクトな不変集合を全くもたない、いわゆる不安定な力学系であって、その軌道は $t \rightarrow \pm\infty$ のとき N に漸近する。

この場合、前ページの (1), (2) の結果があるので、 N の中の力学系はきわめて簡単な構造をもっている。

さらに $S^2 - N$ 上の力学系の構造も実はきわめて簡単なのであって、それは平行流と同型 (すなわち parallelizable) であることが証明できる。

これらの事実があるために、 S^2 上の力学系の研究は、2) に属する軌道おとりのような行動をとりながら N に漸近するかという局所的な問題に帰着されてしまう。Poincaré-Bendixson の理論の成功の鍵はこのような事情に負うところであると思つてよいであろう。

それでは相空間がもっと一般なコンパクト空間であるとき、このような考え方を真似て、力学系を

1) * limit set に在り得るようなコンパクトな不変集合全体の和の上の力学系と,

2) その残りの部分である不安定な力学系

とに分けてしまい, 2) の部分が実は平行流と同型であることが証明できるものであろうか?

もちろんこの場合には, 1) は S^2 の場合の N のような簡単な構造でも, ていねいなことで, このような分解をしただけでは問題は解決しないが, とにかくこの分解によって, 本質的に大域的考察を必要とする部分 1) と, 局所的考察によって構造が決定される部分 2) とに問題を分割するところができる.

以上がこの問題と考えるに到った動機である.

証明は [1] に詳しく述べられているので, ここでは結果を記述するに止める. また, 証明に利用された ω の概念や定理の ω の説明は [2] を参照されたい.

§2. 記号と定義

X は locally compact metric space, (X, π) は X 上の相空間とする. 力学系 とする. 可なり \mathbb{R} は実数全体の集合に自然な位相を入れたものとするとき

1) π は $X \times \mathbb{R}$ から X への連続写像

2) $\forall x \in X$ に対し $\pi(x, 0) = x$

$$3) \quad \forall x \in X, \quad \forall \Delta, t \in \mathbb{R} \quad \pi(\pi(x, \Delta), t) = \pi(x, \Delta + t)$$

∴ $\Delta \mapsto \pi(x, \Delta)$ なる記号を用いる。

$$(1) \quad C(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{\pi(x, t)\} \quad (x \text{ を通る軌道})$$

$$(2) \quad C^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} \{\pi(x, t)\} \quad (x \text{ から出る正の半軌道})$$

$$(3) \quad C^-(x) = \bigcup_{t \leq 0} \{\pi(x, t)\} \quad (x \text{ から出る負の半軌道})$$

$$(4) \quad L^+(x) = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \{\pi(x, t)\}} \quad (x \text{ の } \omega\text{-limit set})$$

$$(5) \quad L^-(x) = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \leq \tau} \{\pi(x, t)\}} \quad (x \text{ の } \alpha\text{-limit set})$$

§ 1 =

定義 1. $x \in X$ の positive prolongation $D^+(x)$ とは

$$y \in D^+(x) \iff \exists \{x_n\} \subset X, \{t_n\} \subset \mathbb{R} \text{ s.t. } x_n \rightarrow x, t_n \geq 0, \pi(x_n, t_n) \rightarrow y$$

定義 2. $x \in X$ の positive prolongational limit set $J^+(x)$ とは

$$y \in J^+(x) \iff \exists \{x_n\} \subset X, \{t_n\} \subset \mathbb{R} \text{ s.t. } x_n \rightarrow x, t_n \rightarrow \infty, \pi(x_n, t_n) \rightarrow y$$

定義 1 における $t_n \geq 0$ と $t_n \leq 0$ とを交換して negative prolongation $D^-(x)$ と定義する。

定義 2 における $t_n \rightarrow \infty$ と $t_n \rightarrow -\infty$ とを交換して negative prolongational limit set $J^-(x)$ と定義する。

$D^\pm(x) = J^\pm(x) \cup C^\pm(x)$, $J^\pm(x) \supset L^\pm(x)$ (複号同値) であり, $J^\pm(x)$ は閉不変集合である。

定義 3. M は compact な不変集合とする。

1) $[x; x \in X, \phi \neq L^+(x) \subset M]$ は M の region of positive attraction とおき, $A^+(M)$ と表わす。

2) 1) にはおいて $L^+(x) \in L^-(x)$ でおきかえたとき M の region of negative attraction とよび $A^-(M)$ で表わす。

3) $[x; x \in X, L^+(x) \cap M \neq \emptyset]$ $\in M$ の region of positive weak attraction とよび $a^+(M)$ で表わす。

4) 3) にはおいて $L^+(x) \in L^-(x)$ でおきかえたとき $\in M$ の region of negative weak attraction とよび $a^-(M)$ で表わす。

5) $B^\pm(M) = A^\pm(M) - M, \quad b^\pm(M) = a^\pm(M) - M.$

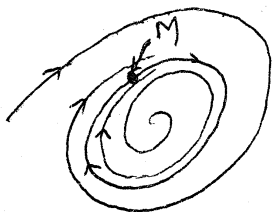
($A^\pm(M) \supset M, a^\pm(M) \supset M$ は明かである。)

$A^\pm(M), B^\pm(M), a^\pm(M), b^\pm(M)$ はそれぞれ不変集合である。

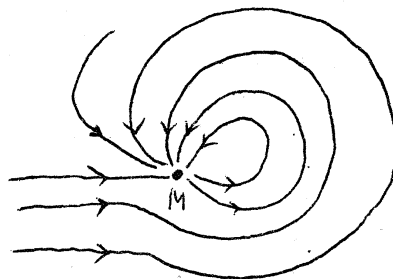
定義 4. 1) $A^+(M) (A^-(M))$ が M の近傍にあるとき, $M \in$ positive (negative) attractor とよぶ。

2) $a^+(M) (a^-(M))$ が M の近傍にあるとき, $M \in$ ~~$A^\pm(M)$~~ positive (negative) weak attractor とよぶ。

attractor は weak attractor であるが, その逆は必ずしも成り立たない。 attractor は必ずしも安定ではないが, 必ず漸近安定である。



weak attractor \Rightarrow attractor になる例



安定である attractor の例

定義 5. M は compact な不変集合とする, M の近傍 U の存在し
 $\tau, M \cap U < \tau$ かつ $\tau > \tau_0$ ならば $C^+(x) \not\subset U, C^-(x) \not\subset U$ であるとき
 x は M の saddle set であるとき, saddle
 set である compact な不変集合を non-saddle set とする.

§ 3. 必要定理

定理 1. M の positive (negative) weak attractor であるとき

$$D^+(M) = \alpha^-(M) \quad (D^-(M) = \alpha^+(M)) \quad (\text{Bhatia})$$

定理 2. M の non-saddle set であるとき

$$x \notin M, L^+(x) \cap M \neq \emptyset \rightarrow M \supset J^+(x) \supset L^+(x)$$

$$x \notin M, L^-(x) \cap M \neq \emptyset \rightarrow M \supset J^-(x) \supset L^-(x) \quad (\text{Saito})$$

系 M の non-saddle set であるとき

$$\alpha^+(M) = A^+(M), \quad \alpha^-(M) = A^-(M)$$

定理 3. M の non-saddle set である minimal set である孤立点である

$$\text{であるとき} \quad D^+(M) = \overline{A^+(M)}, \quad D^-(M) = \overline{A^-(M)} \quad (\text{Saito})$$

定理 4. M の non-saddle set である minimal set である孤立点である

であるとき $B^+(M) (= \beta^+(M)), B^-(M) (= \beta^-(M))$ は $t \in \mathbb{R}$ の開集合である.
 (Saito)

定義 6. 力学系 (X, π) において, $S \subset X$ と, X から $S \times \mathbb{R}$

への homeomorphism h がある条件を満足するものを存在するとし,

(X, π) は parallelizable であるとする.

- 1) $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \pi(S, t) = X,$
- 2) $\forall x \in S, \forall t \in \mathbb{R} \text{ に対して } h(\pi(x, t)) = (x, t)$

定理 5. X が locally compact, separable, metric π をもつ (X, π) かつ parallelizable である必要十分条件は, $\forall x \in X$ に対して $J^+(x) = \emptyset$ (ある x は $J^-(x) = \emptyset$) となることである (Nemytskii)

§4. compact system の分解

X は compact metric space として力学系 (X, π) を考えよ。
 minimal set は有限個で, L なる τ 区間は孤立して存在し得る。
 minimal set のいくつかは saddle S_1, \dots, S_p ($0 \leq p < \infty$),
 non-saddle F_1, \dots, F_r ($0 \leq r < \infty$) とする。これら

$$N = (\bigcup S_k) \cup (\bigcup F_k)$$

とすると, X は compact π をもつ任意の $x \in X$ に対して $L^\pm(x) \neq \emptyset$ 。
 かつ $L^\pm(x)$ は compact な不変集合で, L なる τ minimal set
 は少なくとも一つある。かつ

$$L^+(x) \cap N \neq \emptyset, \quad L^-(x) \cap N \neq \emptyset$$

ゆえに N は正負両方向の ~~attractor~~ weak attractor である

$$a^+(N) = a^-(N) = X$$

L なる τ 定理 1 により $D^+(N) = D^-(N) = X$ となるので

$$\begin{aligned} X &= (\bigcup D^+(S_k)) \cup (\bigcup D^+(F_k)) \\ &= (\bigcup D^-(S_k)) \cup (\bigcup D^-(F_k)) \end{aligned}$$

定理 3.12 より

$$X = (\cup D^+(S_k)) \cup (\cup \overline{A^-(F_k)}) = (\cup D^-(S_k)) \cup (\cup \overline{A^+(F_k)})$$

∴ \mathcal{C}_k 区間の \mathcal{F}_k 区間の \mathcal{F}_k 区間の \mathcal{F}_k 区間の

$$X = (\cup D^+(S_k)) \cup (\cup B^-(F_k)) \cup (\cup (\partial A^-(F_k) \setminus \cup F_k)) \cup (\cup F_k)$$

$$= (\cup D^-(S_k)) \cup (\cup B^+(F_k)) \cup (\cup (\partial A^+(F_k) \setminus \cup F_k)) \cup (\cup F_k)$$

∴ 3 区間の補題の成り立ち。

補題 1. F_1, \dots, F_r の任意の \mathcal{F} に表わすと

$$\partial A^+(F) \setminus \cup F_k \subset \cup D^-(S_k), \quad \partial A^-(F) \setminus \cup F_k \subset \cup D^+(S_k)$$

∴ \mathcal{C}_k 上の関係に依って

$$X = (\cup D^+(S_k)) \cup (\cup B^-(F_k)) \cup (\cup F_k)$$

$$= (\cup D^-(S_k)) \cup (\cup B^+(F_k)) \cup (\cup F_k)$$

∴ \mathcal{C}_k

$$M = \cup F_k$$

$$P = (\cup B^+(F_k)) \cap (\cup B^-(F_k))$$

$$Q = (\cup D^+(S_k)) \cap (\cup B^+(F_k))$$

$$S = (\cup D^-(S_k)) \cap (\cup B^-(F_k))$$

$$T = (\cup D^+(S_k)) \cap (\cup D^-(S_k))$$

よって $X = M \cup P \cup Q \cup S \cup T$ となり、∴ $M, P,$

Q, S は互に disjoint, T は P, Q, S とは disjoint であり

と証明できる。さらに $T \cap M$ は必ずしも空集合ではない。

また、 M, P, Q, S, T は互に不変集合で、 M, T は閉集合、

P は閉集合である。

補題 2. $T \cap M \neq \emptyset$ ならば $T \cap M = \bigcup (T \cap F_k)$ であり、 $T \cap F_k \neq \emptyset$ ならばそれは T の連結成分である。

この補題から $\tilde{T} = T \cap (X - M)$ とおけば \tilde{T} も閉不変集合であることがわかる。

これから

$$X = M \cup P \cup Q \cup S \cup \tilde{T}$$

存在分解が得られる。 M, P, Q, S, \tilde{T} は不変集合であり互いに disjoint, M, \tilde{T} は閉集合, P は閉集合である。そして $M \neq \emptyset, \tilde{T} \neq \emptyset$ ならば $P \neq \emptyset$ であり、また Q, S のうち少なくとも一方は空である。

次に述べたものの最終的存在分解定理がある。

主定理. $\{P_\alpha\}, \{Q_\alpha\}, \{S_\alpha\}$ はそれぞれ P, Q, S の連結成分とすることができる。

(1) ある番号 j に対して i に対して $P_\alpha \subset B^+(F_j) \cap B^-(F_i)$ である ($j=i$ のときはあり得る)

(2) $x \in P_\alpha \rightarrow L^+(x) = F_j, L^-(x) = F_i$

(3) (P_α, π) は parallelizable ($\pi^{-1}|_{(P_\alpha, \pi)}$ は (X, π) の P_α への restriction とする)

(4) ある番号 j に対して $Q_\alpha \subset B^+(F_j)$

(5) $\partial Q_\alpha \cap M = F_j$

$$(6) \quad x \in Q_\alpha \rightarrow L^+(x) = F_j, \quad L^-(x) \subset \tilde{T}$$

(7) (Q_α, π) は parallelizable

(8) ある番号 j に對し $S_\alpha \subset B^-(F_j)$

$$(9) \quad \partial S_\alpha \cap M = F_j$$

$$(10) \quad x \in S_\alpha \rightarrow L^-(x) = F_j, \quad L^+(x) \subset \tilde{T}$$

(11) (S_α, π) は parallelizable

証明は \Leftarrow の証明は述べた通り、parallelizability の証明には、定理 2 と定理 5 とを併用し、 \Leftarrow と \Rightarrow の (Q_α, π) が parallelizable なることを示すには次のようにする。

$x \in Q_\alpha$ とすれば (6) により、ある番号 j に對して $L^+(x) = F_j$. F_j は non-saddle 点から定理 2 により $J^+(x) \subset F_j$. \Leftarrow の $Q_\alpha \cap F_j = \emptyset$ より (Q_α, π) にある x は $J^+(x) = \emptyset$. 由ては定理 5 により (Q_α, π) は parallelizable. (Q_α は compact, separable, metric なることは 5.3 の簡単な証明で示す.)

この定理からわかるように P, Q, S の中の軌道はすべて \mathbb{R} 行流と同型だから、 \mathbb{R} と \mathbb{R} の limit set は M であるから \tilde{T} に含まれるから、問題は M と \tilde{T} の近傍での軌道の行流を \mathbb{R} と \mathbb{R} とにしようとする。すなわち問題を局所化した。

M の構造をしようとするにはまず M の minimal set の内部構造をしようとする。これは本質的に global な問題であり、多くの人は、この研究を始めたころ、未だ解決には程遠い、

\tilde{T} の構造を話し合えるには、力学系 (\tilde{T}, π) を考える。 \tilde{T} は閉集合であるからこれはコンパクトな力学系である。この minimal set は S_1, \dots, S_p であるが、このうち $u \rightarrow v$ の u は (\tilde{T}, π) にあっては non-saddle であるから $u \in S_i$ である。 $u \in S_i$ は (\tilde{T}, π) の saddle と non-saddle の両方の minimal set を含むから、 \tilde{T} があり、 $u \in X$ と考え、上の分解を行なう。その結果得られた \tilde{T} には π 同士の分解を行なう。

minimal set の数は有限個であるから、この分解は有限回で終る。すなわちこの系統は有限回 $u \rightarrow v$ であるから、最後に \tilde{T} には $u \in S_i$ の minimal set は (\tilde{T}, π) に関して $u \in S_i$ non-saddle となるから、 $u \in S_i$ saddle となるから $u \in S_i$ である。その場合には、 \tilde{T} の分解は、 \tilde{T} があり $u \in X$ とおけば

- 1) $X = M \cup P$
- 2) $X = \tilde{T}$

$u \in S_i$ となる。 1) の場合には、 P の構造が $u \in S_i$ にわかるとして、 $u \in S_i$ の力学系は平行流と同型であるから、問題はなしか、 2) の場合には、上のより左の方法ではやはり議論を進めることができない、本質的に global な考察が必要となる。したがって、この方向で残された問題は、 M の内部構造を話し合える問題、すなわち

A) minimal dynamical system の研究

すなわち $X = \tilde{T}$ であるような場合の研究、すなわち

B) minimal set が Γ へ τ saddle set であるよりの力学系の研究

の \Rightarrow は要約される。A) については昔から研究されてきたが、B) は (saddle set という概念は [3] において初めて導入されたものなると) 全く手がつけられていない。

この他に、 M がある Γ の近傍での軌道の行動をしろと、この中に局所的な問題があるが、これもほとんどの手がついている。筆者は、 S^2 上の力学系の特異点の近傍の軌道の研究のために Bendixson が発見した nodal region theory を一般化することを試みたが、あまり進展をみていない。([4], [5], [6] 参照)

文献

- [1] T. SAITO, On the structure of compact dynamical systems, Funkcial. Ekvac. 13 (1970), 147-170
- [2] N.P. BHATIA & G.P. SZEGÖ, Stability theory of dynamical systems, Springer, Berlin, Heidelberg & New York (1970)
- [3] T. URA, On the flow outside a closed invariant set; stability, relative stability and saddle sets, Contrib. Diff. Eqs, 3 (1964), 249-294
- [4] T. SAITO, On the flow outside an isolated minimal set, Proc.

U.S. - Japan Seminar on Diff. and Func. Eqs, Benjamin, New York
& Amsterdam, (1967), 301-312

[5] T. SAITO, Isolated minimal sets, Funkcial. Ekvac. 11 (1968),
155-167.

[6] T. SAITO, On a compact invariant set isolated from mini-
mal sets, Funkcial. Ekvac. 12 (1969), 193-203