数理解析研究所講究録
173巻 1973年 32-44

S^3 上のclosed orbitをもたないvector field

東大 理　西森敏之

§1. 序

1950年にSeifertは[5]において次の定理を証明した。

<u>定理 1.1</u>　V_0をHopf fibering: $S^3 \to S^2$のfibreをorbitとするvector fieldとするとき, C^0-topologyでV_0に十分近い連続vector field VがS^3の各点でただひとつのorbitをもつならば, Vは少なくともひとつのclosed orbitをもつ。

Seifertはさらに次の予想を提出した。

<u>予想 1.2</u>　S^3上のすべての非特異連続vector fieldはS^3の各点でただひとつのorbitをもつならば, 少なくともひとつのclosed orbitをもつ。

この予想に反して最近Paul Schweitzerがclosed orbitをもたないS^3上の非特異C^1級vector fieldを構成した。それをself containedな証明をつけて紹介するのが目標である。

状況を明らかにするために関連する結果を次に述べる。

<u>定理 1.3</u>（Wilson [7]）n次元多様体M^n上に非特異C^r($1 \leqq r \leqq \infty$)級 vector field Vが与えられたとき，$0 \leqq k \leqq n-2$ なる整数kに対して，次の条件を満たす非特異C^r級 vector field V'がVを修正することにより得られる。

(1) V'のすべての空でない極限集合はk次元 torus と同相。

(2) M^nの各compact set と交わる極限集合は有限個。

定理(1.3)により，$n \geqq 4$の場合は$k \geqq 2$とできるから closed orbitが存在しないように修正できる。

<u>定理 1.4</u>（Pugh [4]）$\mathfrak{X}_0(M^n)$をn次元多様体M^n上の非特異 vector field 全体の集合にC^1-topology を入れたものとする。M^nが compact ならば，closed orbit をもつようなすべての$V \in \mathfrak{X}_0(M^n)$からなる部分集合は$\mathfrak{X}_0(M^n)$の open dense な部分集合を含む。

定理(1.4)はほとんどすべての非特異 vector field に対して Seifert 予想がなりたつことを示している。定理(1.4)の open dense な部分集合とは実は stable closed orbit をもつ$V \in \mathfrak{X}_0(M^n)$全体の集合である。

一方，予想(1.2)は次のような問題に拡張される。

<u>問題 1.5</u>　単連結閉多様体上のすべての foliation は compact leaf をもつか？

この問題に統一して最後にまとめるので，ここでは次の結

果を述べるにとどめる。

定理 1.6 (Novikov [3]) 3次元単連結閉多様体上の余次元1 foliation は $S^1 \times S^1$ と同相な compact leaf をもつ。

§2. Schweitzerの結果

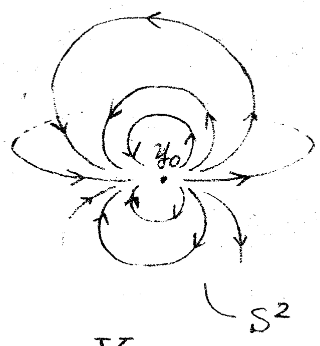
定理 2.1 (Schweitzer) S^3 上に closed orbit をもたない非特異 C^1 級 vector field が存在する。

定理(2.1)の vector field の極小集合の形状は証明を見ればよくわかるのでここではふれない。

現在 C^2 級以上でわかっている結果を次に述べる。

定理(2.2) S^3 上に丁度ひとつの closed orbit をもつ非特異 C^∞ 級 vector field が存在する。

証明 V_0 を Hopf fibering $\pi: S^3 \longrightarrow S^2$ の fibre を closed orbit とする vector field とする。V_1 をただひとつの零点 y_0 をもち closed orbit をもたない S^2 上の C^∞ 級 vector field とする。V_1' を $d\pi(V_1'(x)) = V_1(\pi(x))$ となるような vector field とする。そして $V = V_0 + V_1'$ とおけばよい。実際 V の orbit の π による像は V_1 の orbit になるから，V の orbit で closed になりうるのは $\pi^{-1}(y_0)$ に



V_1

含まれる場合しかないが，$\pi^{-1}(y_0)$ 自身が V の closed orbit である。(証明終り)。

§3. Denjoy の結果

定理(2.1)を証明するのに使う次の定理をまず証明する。

定理 3.1 (Denjoy [1]) $S^1 \times S^1$ 上に次のような非特異 C^1 級 vector field が存在する。

(1) closed orbit をもたない。

(2) 任意の orbit の閉包は内点を含まない。

注意 3.2　定理(3.1)において次の定理から C^1 級という条件は本質的であることがわかる。

定理 3.3 (Denjoy, Siegel [6])　V を $S^1 \times S^1$ 上の closed orbit をもたない非特異 C^2 級 vector field とすれば，V のすべての orbit は dense である。

予備定理 3.4　次のような C^1 級微分同相 $f: S^1 \to S^1$ がある。

(1) f は fixed point, periodic point をもたない。

(2) $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ の導集合は，$x \in S^1$ によらない，内点を含まない S^1 の部分集合である。

(3.4)から(3.1)は次のようにして証明できる。$S^1 \times [0,1]$ 上に $x \times [0,1]$ $(\forall x \in S^1)$ を orbit にもつ vector field をとり，$S^1 \times 0$ と $S^1 \times 1$ を(3.4)の f で同一視すれば，(3.1)の条件を満たすよう

な$S^1\times S^1$上の vector field が得られる。

<u>(3.4)の証明</u>　まず次のような数列 $\{\ell_n>0 \mid n\in\mathbb{Z}\}$ を選んでおく。① $L=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ell_n<\infty$.　② $\lim_{n\to\pm\infty}\ell_n/\ell_{n+1}=1$.
たとえば, $\ell_n=1/(1+n^2)$ とおけばよい。

次に任意の有界閉区間の列 I, J に対して C^∞級微分同相 $f_{I,J}: I\to J$ で次の条件をみたすものを選ぶ。

① ∂I のある近傍で $\frac{df_{I,J}}{dt}=1$　　($\ell(I)$はIの長さ)

② $\mathrm{Min}(1,\frac{\ell(J)}{\ell(I)})-(1-\frac{\ell(J)}{\ell(I)})^2\le \frac{df_{I,J}}{dt}\le \mathrm{Min}(1,\frac{\ell(J)}{\ell(I)})+(1-\frac{\ell(J)}{\ell(I)})^2$

さらに無理数αを1つ選び, $\varphi:S^1\to S^1$を$\varphi(x)=e^{2\pi i\alpha}\cdot x$ ($\forall x\in S^1\subset\mathbb{C}$)によりきめ, $\alpha_n=\varphi^n(1)$ ($\forall n\in\mathbb{Z}$) とおく。

Sを周の長さ $2\pi+L$ の円とする。このとき次のような連続写像 $p:S\longrightarrow S^1$(単位円) が構成できる。

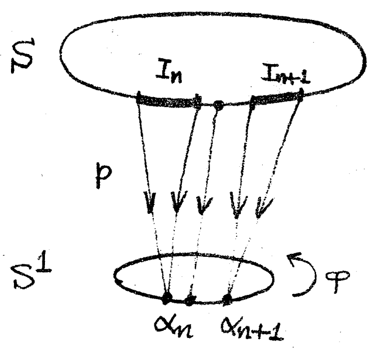
① $p|p^{-1}(S^1-\{\alpha_n|n\in\mathbb{Z}\})$は全単射かつ measure-preserving.

② $I_n=p^{-1}(\alpha_n)$は長さℓ_nの閉区間

そこで $f:S\to S$ を次のように定義する。

$f(x)=p^{-1}\circ\varphi\circ p(x)$ for $\forall x\in S-\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n$.

$f|I_n=f_{I_n,I_{n+1}}$



このときfはC^1級微分同相になり求めるもの。さらに,

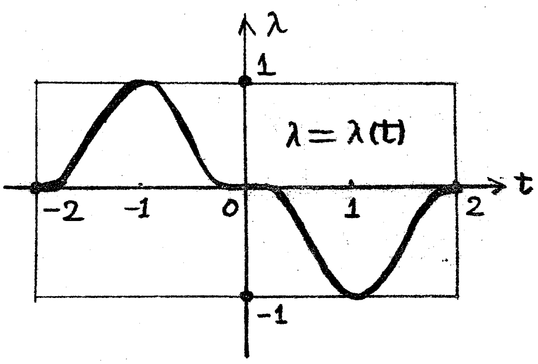
$\{f^n(x)|n\in\mathbb{Z}\}^d = S-\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\mathring{I}_n$ for $\forall x\in S$.

(証明終)

§4. 定理2.1(Schweitzer)の証明

Xを定理(3.1)(Denjoy)で構成された$S^1\times S^1$上のvector fieldとする。Xのひとつのorbitの閉包をKとし，Kと交わらない開円板Uをとり，$N=S^1\times S^1$とおく。

$N\times[-2,2]$上にC^1級vector field $Y(x,t)$を次のように構成する。まず∂Nの近傍で0，K上で1になるC^∞級写像$\phi: N\to[0,1]$をとる。次にC^∞級写像$\lambda:[-2,2]\to[-2,2]$を次のように選ぶ。



① $\lambda(-t)=-\lambda(t)$

② $0,\pm2$の近傍で $\lambda(t)=0$.

③ $\lambda(-1)=1$, $\lambda(1)=-1$.

④ $t\neq\pm1$ならば，$|\lambda(t)|<1$

さて$Y(x,t)$を次のように定義する。

$$Y(x,t)=\phi(x)\lambda(t)X(x)+(1-\phi(x)|\lambda(t)|)\frac{\partial}{\partial t}$$

このとき，$Y(x,t)$は次の性質をもつ。

① $N\times[-2,2]$の境界の近傍では $Y=\frac{\partial}{\partial t}$

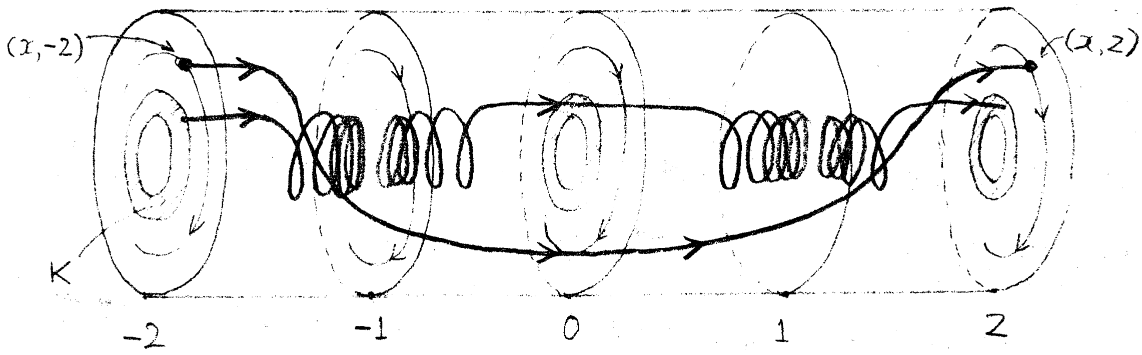
② $(x,-2)$から出るYのorbitをみると次のいずれかが起る。

(a) $(x,2)$に達する。(同じ$x\in N$であることに注意せよ)

(b) $\phi^{-1}(1)\times\{-1\}$に近づき$N\times(-1,2]$には現われない。

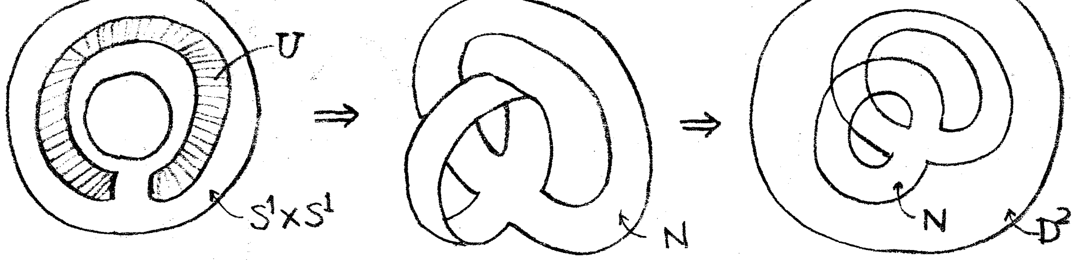
とくに$x\in K$ならば(b)が起る。

③ $Y(x,t)$の極小集合は$\phi^{-1}(1)\times\{\pm1\}$に含まれる。



vector field $Y(x,t)$

さて下図のようにして immersion $f: N \to D^2$ をつくる。



次に重なっている部分をずらして厚みづけることにより，$dg(\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}$ となる imbedding $g: N\times\underset{t}{[-\varepsilon,\varepsilon]} \longrightarrow D^2\times\underset{t}{[0,\delta]}$ がつくれる。

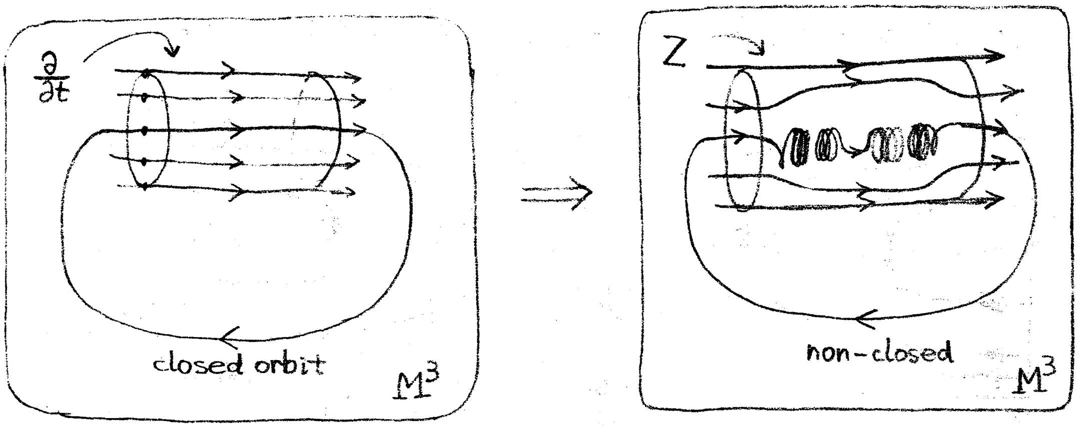
そこで $D^2\times[0,\delta]$ 上の C^1 級 vector field Z を次のように構成する。

① $D^2\times[0,\delta] - g(\mathring{N}\times(-\varepsilon,\varepsilon))$ 上では $Z = \frac{\partial}{\partial t}$

② $g(N\times[\varepsilon,\varepsilon])$ 上では $Z(g(x,t)) = Y(x, \frac{2}{\varepsilon}t)$

一方，3次元多様体上の非特異 vector field は局所的にみれば $D^2\times[0,\delta]$ 上の vector field $\frac{\partial}{\partial t}$ と同一視できる。そこで与えられた vector field の closed orbit が $g(K\times 0)$ と交わる

ようにとり，与えられた vector field を $D^2\times[0,\delta]$ の部分において Z で置きかえると，その closed orbit は closed でなくなる。この変形で新しく closed orbit が現われることはない。



以上により有限個の closed orbit をもつ非特異 vector field は closed orbit をもたないように C^1 級で修正できることが示されたので，定理(2.2)とあわせれば定理(2.1)が証明できている。

§5. まとめ

定理(2.1)の証明において，円板の内部において標準的な vector field をうまく構成した vector field で置き換える方法が使われたが，実は定理1.3(Wilson)も同様の方法で証明されている。この方法は foliation の場合にも適用できるのでそれを簡単に述べる。

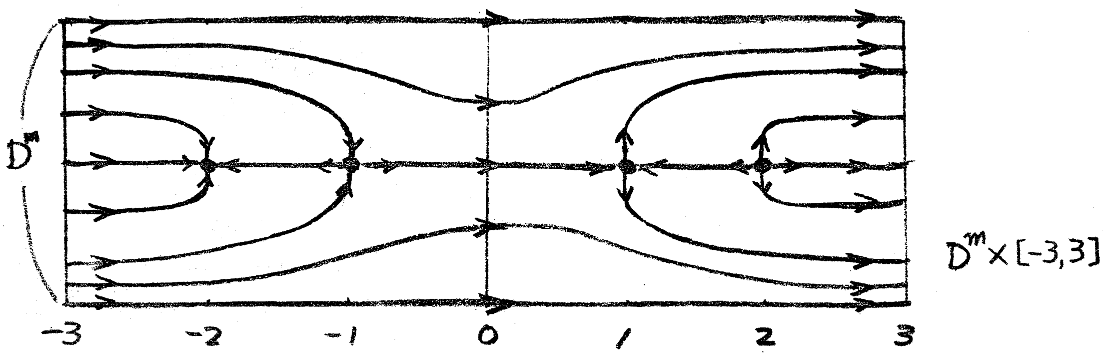
Wilson[7] はまず次のような $D^m\times[-3,3]$ 上の vector field X を考えた。$p_1: D^m\times[-3,3]\longrightarrow D^m$, $p_2: D^m\times[-3,3]\longrightarrow[-3,3]$ は射影。

(1) $D^m \times [-3,3]$ の境界の近傍で $X = \frac{\partial}{\partial t}$

(2) $dp_1(X(x,-t)) = -dp_1(X(x,t)) \quad x \in D^m,\ t \in [-3,3]$

$dp_2(X(x,-t)) = dp_2(X(x,t))$

(3) X の零点の個数は4。closed orbit はもたない。



[A] 次に $S^1 \times D^m \times [-3,3]$ 上の vector field Y を次のように構成する。$S^1 = [0,1]/\{0,1\}$ とみなし座標を s で表わす。α: $[0,3] \to [0,1]$ を，$t = 0,3$ の近傍で $\alpha(t) = 0$，$t = 1,2$ の近傍で $\alpha(t) = 1$ となる C^∞ 級写像とする。

$$Y(s,x,t) = \begin{cases} -\alpha(t)\frac{\partial}{\partial s} + X(x,t) & \text{if } t \geqq 0. \\ \alpha(|t|)\frac{\partial}{\partial s} + X(x,t) & \text{if } t \leqq 0. \end{cases}$$

とおくと，$Y(s,x,t)$ は次の性質をもつ。

(1) $S^1 \times D^m \times [-3,3]$ の境界の近傍で $Y = \frac{\partial}{\partial t}$

(2) Y は4つの closed orbit をもつ。零点はもたない。

(3) $(s,x,-3)$ から出る orbit に対して次のいずれかが起る。

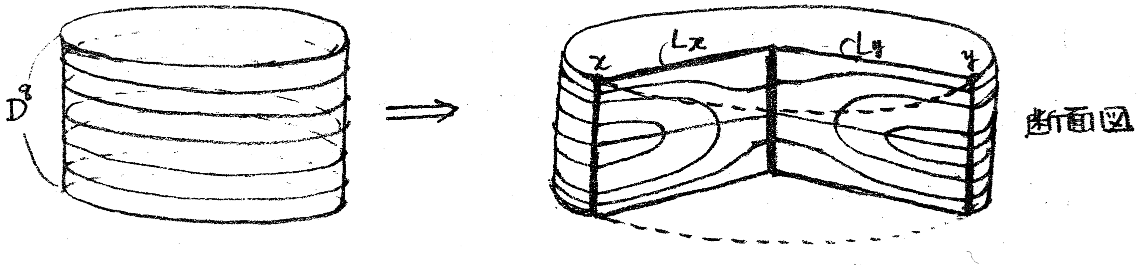
(a) $(s,x,3)$ に達する。

(b) closed orbit にまきつく。

[B] 次に $S^1 \times D^m \subset \mathrm{Int}\, D^{m+1}$ とみなし，まだ定義されていないところでは $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ とおくことにより，Y を $D^m \times [-3,3]$ 上の vector field X_1 に拡張する。

[A] と [B] の操作をくりかえすことにより，$D^{m+k} \times [-3,3]$ 上の vector field ですべての極小集合が k 次元 torus $S^1 \times \cdots \times S^1$ に同相であるような vector field X_k が構成できる。ここで注意すべきことは，部分集合 $\{x \in D^{m+k} \mid (x,-3)$ から出る orbit は $D^{m+k} \times [0,1]$ にはあらわれない$\}$ が D^{m+k} の内点を含むことである。以上により，M^{m+k+1} が compact のときは有限回の"X_k による置き換え"により M 上の任意の vector field は k 次元 torus と同相であるような極小集合しかもたないように修正できる。

Foliation の場合について。余次元 q $(q \geq 2)$ foliation は局所的には $\{y \times D^p \mid y \in D^q\}$ を leaf の族とする $D^q \times D^p$ 上の foliation とみなせる。D^p を半径 3 とみなし極座標 (x,t) $(x \in S^{p-1}, t \in [0,3])$ を入れる。$L_x = \{(x,t) \mid t \in [0,3]\}$ とおくと，$D^q \times L_x$ 上には 1 次元 foliation が得られる。これを上に得られた vector field を $D^q \times [0,3]$ に制限したものの orbit でおきかえると，$D^q \times D^p$ 上に境界の近傍ではもとと変らない foliation が得られる。



注意5.1　余次元1のfoliationに対しては，次の事実から"おきかえ"の操作によるfoliationの修正は不可能であることがわかる。

定理5.2 (Nishimori [2])　$\mathcal{F}$を$D^1\times D^n$上の余次元1 transversely orientable foliationとし，$\mathcal{F}_0$を$\{t\times D^n \mid t\in D^1\}$をleafの族とする$D^1\times D^n$上のfoliationとする。$D^1\times D^n$の境界の近傍で$\mathcal{F}=\mathcal{F}_0$であるならば，$\mathcal{F}_0$のleafを$\mathcal{F}$のleafに移すような微分同相 f: $D^1\times D^n \to D^1\times D^n$が存在する。

さて§1で述べたように，問題(1.5)"単連結閉多様体上のすべてのfoliationはcompact leafをもつか?"に関して，"おきかえ"による方法で得られる結果を次に述べる。

定理5.3　C^r ($1\leqq r\leqq\infty$)級閉多様体M^n上の余次元q ($q\geqq 3$) C^r級foliationはcompact leafをもたないC^r級foliationに修正できる。ただし$n>q$とする。

定理5.4　C^r ($1\leqq r\leqq\infty$)級閉多様体M^n ($n\geqq 3$)上の余次元2のC^r級foliationは，compact leafとして$S^1\times S^{n-3}$に同相なものを有限個しかもたないC^r級foliationに修正できる。さらに，compact leafをもたないC^1級foliationに修正できる。

以上のことから次の二つの問題がうかびあがる。

問題5.5　S^3上のすべてのC^2級非特異vector fieldはclosed orbitをもつか?

<u>問題5.6</u>　$n\ (n \geqq 4)$ 次元単連結閉多様体上のすべての余次元1 foliation は compact leaf をもつか？

Appendix

"おきかえ"の方法により次の定理が証明できる。

<u>定理5.7</u>　M_1^n, M_2^n を余次元 q foliation をもつ多様体とする。$n > q \geqq 2$. $D^q \times S^1 \times S^{n-q-1} \subset S^n$ は自然に入っているとする。$X = S^n - \mathring{D}^q \times S^1 \times S^{n-q-1}$ とし，$M_0 = X \cup X/\sim$（$\sim$は境界を identity で同一視）とおく。そのとき，$M_1 \# M_0 \# M_2$ は余次元 q foliation をもつ。

定理(5.7)は余次元1における次の定理に対応する。

<u>定理5.8</u>(Fukui)　M_1^n, M_2^n を余次元1 foliation をもつ単連結多様体とする。そのとき，$M_1^n \# S^2 \times S^{n-2} \# M_2^n$ は余次元1 foliation をもつ。

References

[1] A. Denjoy, Sur les courbes définies par les equations différentielles à la surface du tore, Journ. Math. pures et appl., 9(1932), 333-375

[2] T. Nishimori, A criterion to the extensibility of codimension-one foliations, 1972

[3] S.P. Novikov, Topology of foliations, Trudy Moskov. Mat. Obsc. 14(1965), 248-278

[4] C.C. Pugh, The closing lemma, Amer. J. Math. 89(1967), 956-1009

[5] H. Seifert, Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations, Proc. Amer. Math. Soc. 1(1950), 287-302

[6] C.L. Siegel, Note on differential equations on the torus, Ann. of Math., 46(1945), 423-428

[7] F.W. Wilson, On the minimal sets of non-singular vector fields, Ann. of Math., (2)84(1966), 529-536