数理解析研究所講究録
173巻 1973年 21-31



# Symbolic Dynamics について

東教大 理 伊藤 俊次

## §1 序

まず Symbolic dynamics $(X, \sigma)$ を次のように定義しよう。
$A = \{1, 2, \cdots, S\}$ を symbol の空間，$A^{\mathbb{Z}}$ を $A$ の可算直積とし，topology を discrete top の product top を入れておく。$A^{\mathbb{Z}}$ の元 $\omega$ を

$$\omega = (\cdots\cdot\ \omega(-1), \omega(0), \omega(1), \cdots\ \omega(n), \cdots\cdot) \qquad \omega(n) \in A.$$

と書くことにする。$A^{\mathbb{Z}}$ 上の shift transformation $\sigma$ とは

$$(\sigma\omega)(n) = \omega(n+1) \qquad \omega \in A^{\mathbb{Z}}$$

のことをいう。このとき Symbolic dynamics $(X, \sigma)$ とは $X$ が $A^{\mathbb{Z}}$ の subset で $\sigma X = X$ をみたすものをいう。（以後簡単のために Symbolic dynamics のことを S.D. と書くことにする。

又 $M$ を manifold，$T$ を $M$ 上の diffeomorphism とするとき，$(M, T)$ を Differential dynamical system（以後 D.D.S. と書く）と呼ぶ。

D.D.S. $(M, T)$ が与えられているとき，それに対応する S.D.

$(X, \sigma)$ とは，M の subset N で $TN=N$ をみたすものが存在して，さらに N から X への 1 to 1 map $\varphi ; N \to X$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{T} & N \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

をみたすことをいう。

Symbolic dynamics を使って Differential dynamical system を解析することは，歴史的に多くの成果を挙げている。

Morse, Hedlund, Birkhoff 等は，2-dim constant negative curvature 上の geodesic curve に対して，periodic point が存在するか，又存在すれば dense に存在するか，等の問題について，fundamental domain の boundary に Symbol を与え，curve が次々と時間とともに boundary を cross する Symbol を count し，その symbol の sequence と curve を対応づけることによって，上記の問題について解答を与えた。最近の Smale の "horse shoe" の概念を Differential dynamical system の Symbolic dynamics への表現の好例であろう。("horse shoe" の制限3体問題への応用は丹羽氏の講演参照)

D.D.S. $(M, T)$ に対して Symbolic dynamics を対応させるとき，次のような M の分割 $\underline{P}=\{P_i\}_{i=1}^{m}$ が存在することが望ましい。

$\bigcup_{i=1}^{m} P_i = M$ , $P_i \cap P_j$ は高々 boundary のみ intersect する i.e

$P_i \cap P_j = \partial(P_i) \cap \partial(P_j)$ かつ $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n P_{i_n}$ が Riemann volume でＯの集合をのぞいて１点となる i.e

$M \setminus N \ni \forall x$ について

$x = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n P_{i_n}$ ここで $N$ は volume 0 の集合.

このとき $\varphi$ を $\varphi ; M \setminus N \longrightarrow A^{\mathbb{Z}}$ の map で

$\varphi(x) = (\cdots\cdots i_{-1}, i_0, i_1, \cdots i_n, \cdots)$

とすれば S.D.$(\varphi(M \setminus N), \sigma)$ はかなりの忠実さをもって D.D.S.$(M, T)$ を表現していることになるであろう。

Sinai-Bowen は最近 transitive Anosov diffeo について上のような分割 $\mathcal{P}$ ( Markov partition と呼ばれる)で，さらに $\mathcal{P}$ からきまる S.D.$(\varphi M, \sigma)$ が Markov 性をもつ( §2 で Markov subshift として述べられるもの)分割の存在を示している。(この場合 $\varphi(N)$ は symbol の sequence は一意にはきまらないが，高々有限個の sequence に対応がつくので $\varphi(M) = \varphi(M \setminus N) \cup \varphi(N)$ と思っている。)

D.D.S.$(M, \varphi)$ の忠実な symbolic dynamics への表現，さらには Sinai-Bowen の Markov 分割にみるように，Symbolic dynamics の type が着しいすなおであるような表現を得ることによって，Symbolic dynamics という simple な対象を Analysis しそれを Differential dynamical system へもちこむという手順が組まれ

る。

確かにいかなる表現写像をもちいても，Symbolic dynamicsに表現する以上，もっとも重要な微分構造は捨象せざるを得ない。しかし，Symbolic dynamicsを媒介として他の数学の諸概念をdifferentiable dynamical systemに注入することが出来る。例えば定常過程にみる確率論的概念，normal sequenceにみる整数論的概念，さらには§4で述べるようなGibbs measureにみる統計力学的概念等である。

## §2 periodic points と topological entropy について

Morse, Hedlund, Birkoff, Smale等にみるようにSymbolic dynamicsは，はじめdifferential dynamical systemのperiodic pointsの量的把握に用いられた。この§ではSymbolic dynamicsについて，まずperiodic pointsの性質をしらべよう。

ここでは§1で述べたS.D.$(X, \sigma)$に$X$がclosed setという仮定を加えておく。重要なS.D.$(X, \sigma)$のclassと思われるMarkov subshiftとは次のようなものである。まず$M=(m_{ij})$を$s \times s$-matrixとし$m_{ij}=0$又は$1$とする。$M$が与えられたとき$M$から出来るsequence space $X_M$を

$$X_M = \{(\cdots \omega(-1), \omega(0), \cdots \omega(n), \cdots) \in A^{\mathbb{Z}} \mid m_{\omega(i)\omega(i+1)} = 1 \text{ for all } i \in \mathbb{Z}\}$$

とする。

<u>Def. 1.</u> matrix $M$ が与えられているとき，S.D.$(X_M, \sigma)$ のことを Markov subshift と呼び，$M$ のことを structure matrix と呼ぶ。さらに，とくに $M$ について，ある $n>0$ が存在して $M^n = (m_{ij}^{(n)}) > 0$ となるとき S.D.$(X_M, \sigma)$ を aperiodic Markov subshift と呼ぶ。

ところで S.D.$(X, \sigma)$ について period $n$ の point の数を

$$p_n(X, \sigma) = \#\{\omega \in X \mid \sigma^n \omega = \omega\}$$

と書くことにする。又一般に $X$ を compact metric space, $T$ を $X$ 上の homeomorphism とするとき，dynamical system $(X, T)$ について $(X, T)$ と homeomorphic なものについて不変なスカラー量として topological entropy $h_{top}(X, T)$ が定義されている。勿論 dynamical system $(X, T)$ の sub class である S.D $(X, \sigma)$ についても $h_{top}(X, \sigma)$ は定義され，この場合は次の様なものとなる。

$$h_{top}(X, \sigma) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \# W_n(X)$$

ここで $W_n(X) \ni (\omega_1, \cdots \omega_n)$ とは $X$ の中に現われる長さ $n$ の word である。

topological entropy と periodic points について次のことが知られている。

<u>proposition 1.</u> S.D.$(X, \sigma)$ が与えられているとき，

(i) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log p_n(X, \sigma) \leq h_{top}(X, \sigma)$

(ii) S.D.$(X_M, \sigma)$ が Markov subshift とするとき，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log p_n(X_M, \sigma) = h_{top}(X_M, \sigma)$$

(iii) S.D.$(X_M, \sigma)$ が aperiodic Markov subshift とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log p_n(X_M, \sigma) = h_{top}(X_M, \sigma)$$

この proposition によって Differential dynamical system については次の系が得られる。

系 1. $(M, T)$ を transitive Anosov diffeo とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log p_n(M, T) = h_{top}(M, T)$$

ところで Differential dynamical system について，その topological entropy については次の結果が知られている。

Proposition 2. D.D.S.$(M, T)$ について

$$h_{top}(M, T) \leq n \log 1/\lambda$$

ここで $n$ は $\dim M$，$\lambda$ は $\lambda = \inf_{p\in M} \inf_{v_p \in T_pM} \frac{\|T_* v_p\|}{\|v_p\|}$

この $\overbrace{\text{proposition}}^{2\text{つの}}$ といわゆる D.D.S.$(M, T)$ 上の ζ-ft

$$\zeta(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_n(M, T) t^n\right)$$

を組合わすことによって，

系.2 (i) D.D.S$(M, T)$ が expansive であるとき（symbolic dynamics へ忠実な表現をもつとき）

$$\text{radius } \zeta(t) \geq \exp^{-h_{top}(M, T)} \geq \lambda^n$$

すなわち，$\zeta(t)$ の収束半径が positive.

(ii) とくに D.D.S.(M, T) が transitive Anosov diffeo のとき

radius of $\zeta(t) = \exp^{-h_{top}(M,T)} = \exp^{-h_{top}(X_M,T)} = 1/\lambda$

ここで S.D.($X_M$, T) は transitive Anosov diffeo の Markov 分割からつくられる aperiodic Markov subshift. $\lambda$ は structure matrix M の最大固有値。

系1,2でみるように、differential dynamical system で既に知られている、あるいは未知の結果が Symbolic dynamics を用いて容易に示されることがわかる。

## §3 transversal flow について

transitive Anosov diffeo の simple な example として、$a, b, c, d$ を整数で $ad-bc=\pm 1$ なるものとし、matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_i$ $i=1,2$ が $|\lambda_i| \neq 1$ のものを考え、M を 2-dim torus T を $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ なる $(M, T)$ を考える。

ところで各 $\lambda_i$ について、対応する固有ベクトルを $(\mu_i, \nu_i)$ $i=1,2$ とするとき

$$\frac{dx}{dt} = \mu_i \quad \frac{dy}{dt} = \nu_i \qquad i=1,2$$

なる微分方程式からきまる M 上の flow $\{Z_t^{(i)}; -\infty < t < \infty\}$ は次の著しい性質をもつ。

$$Z_{\lambda_i t}^{(i)} T = T Z_t^{(i)} \qquad \text{for } -\infty < t < \infty$$

$\{Z_t^{(i)}\}$ と T についての位置すけは Sinai-Kubo-Kowada に譲る

ことにして（小和田氏の講演参照）Symbolic dynamics について次のような結果が知られている。

<u>proposition 3.</u> Aperiodic Markov subshift $(X_M, \sigma)$ が与えられているとき，$X_M$ 上の flow $\{Z_t^{(i)}\}_{i=1,2}$ で

$$Z_{\lambda t}^{(1)}\sigma = \sigma Z_t^{(1)} \qquad Z_{\frac{1}{\lambda}t}^{(2)}\sigma = \sigma Z_t^{(2)}$$

を満すものが存在する。ここで $\lambda$ は structure Matrix $M$ の最大固有値。

この proposition は次のようなことを示唆しているのではあるまいか。すなわち，transitive Anosov diffeo $(M, T)$ に対して，$\{Z_t^{(i)}\}_{i=1,2,\cdots,m}$，$\{S_t^{(i)}\}_{i=1,2,\cdots,n}$ なる $M$ 上の 1-parameter group が存在して，$(m+n \leq \dim M)$

$$Z_{\lambda_i t}^{(i)} T = T Z_t^{(i)} \quad \text{and} \quad S_{\mu_i t}^{(i)} = T S_t^{(i)}$$

ここで $|\lambda_i| > 1$ かつ $|\mu_i| < 1$，又 $\{Z_t^{(i)}\}$ $(\{S_t^{(i)}\})$ は，その path が expansive (contractive) な $T$-invariant な foliation の上のみを動くものである。

## §4 invariant measure について

D.D.S. $(M, T)$ について $T$-不変な測度 $\mu$ が存在するか，存在すればどれくらいあるか，又 Riemann volume と絶対連続となるか等の問題は，重要なものである。それは path の behavior に限っても，$\mu$ の存在がわかれば，一定の量的把握が可能であ

る（エルゴード定理），とみられる。

この系では transitive Anosov diffeo について，最近の Sinai の結果のみについて言及する。そのため準備を行う。

$(X, T)$ を dynamical system とし，$\mu_0$ を $X$ 上の $T$-不変な測度とする。又 $h(x)$ を $X$ 上の bounded な函数とする。このとき $\Xi_{m,n}(h|\mu_0)$ を

$$\Xi_{m,n}(h|\mu_0) = \int_X \exp\left(\sum_{k=-n}^{m} h(T^k x)\right) d\mu_0(x) \qquad m, n > 0$$

とし $m, n$ に depend する $X$ 上の measure $\mu_{m,n}(h|\mu_0)$ を次の density の形で与える。

$$\frac{d\mu_{m,n}(h|\mu_0)}{d\mu_0} = \frac{\exp \sum_{k=-n}^{m} h(T^k x)}{\Xi_{m,n}(h|\mu_0)} .$$

<u>Def. 2.</u> dynamical system $(X, T)$ 上の $T$-不変測度 $\mu$ が Gibbs measure であるとは，ある $T$-不変測度 $\mu_0$ と bounded $f$th $h(x)$ が存在して

$$w\text{-}\lim_{n,m\to\infty} \mu_{m,n}(h|\mu_0) = \mu$$

となるときをいう。

このような測度のことを何故 Gibbs measure と呼ぶか，又このような測度が存在することが相転移が起きていないという統計力学的概念と何故対応するか，はここでふれないことにする。

今 $S.D.(\mathcal{M}, \sigma)$ を Aperiodic Markov subshift とするとき，

次の2つの性質をみたす測度$\mu_0$が一意に存在する。

(i) $h_{\mu_0}(X_M,\sigma) = h_{top}(X_M,\sigma)$

(ii) $\mu_0$ は Markov chain からきまる $\sigma$-不変(定常)測度

ここで $h_\mu(X_M,\sigma)$ は，いわゆる (metrical) entropy のことである。

<u>proposition 4</u>　Aperiodic Markov subshift $(X_M,\sigma)$ と，上記の $\mu_0$ が与えられているとき，$h(x)\in \mathcal{F}_{\rho,\kappa}$ なる $h(x)$ については Gibbs measure $\mu(h)$ が存在する。i.e.

$$w\text{-}\lim_{n,m\to\infty} \mu_{m,n}(h\,|\,\mu_0) = \mu(h) \ .$$

ここで $h(x)\in \mathcal{F}_{\rho,\kappa}$ $(0<\rho<1,\ 0<\kappa)$ とは

$$\sup_{\omega(i)\overline{\omega}(j)} \left| h(\cdots\omega(-n)\omega(-n+1)\cdots\omega(0)\cdots\omega(n-1)\omega(n)\cdots) - h(\cdots\overline{\omega(-n)},\omega(-n+1),\cdots\omega(n-1)\overline{\omega(n)}\cdots)\right|$$

$$< c(h)\,\rho^{n^\kappa} \qquad \text{for all } n>0$$

なることをいう。

ところで Sinai は transitive Anosov diffeo の上に三つの $T$-不変測度 $\overline{\mu}, \mu_e, \mu_c$ を構成した。これらは，$\overline{\mu}$ は $h_{\overline{\mu}}(X,T) = h_{top}(X,T)$ なる測度，$\mu_e(\mu_c)$ は expansive (contractive) な invariant foliation の上に制限したとき Riemann volume とについて絶対連続という特徴的な測度であった。

今 transitive Anosov diffeo $(\Omega,T)$ から Markov 分割を用いて作った aperiodic Markov subshift $(X_M,\sigma)$ 上への map を $\varphi$ とすれば，prop.4，によって $h(x)\in \mathcal{F}_{\rho,\kappa}$ であれば $(X_M,\sigma)$ 上に $\mu_0$ を用いて Gibbs measure $\mu(h)$ が存在した。よって

て, $\mu(h)$ を $\varphi$ による $M$ 上に induce された測度 $\varphi^*\mu(h)$ は $T$ 一不変 $M$ 上の Gibbs measure となる。Sinai の主張は次のようなものである。

<u>定理 1</u>　$(M, T)$ を transitive Anosov diffeo とするとき,

(i)　$\bar{\mu}$, $\mu_e$, $\mu_c$ は Gibbs measure

(ii)　$M$ 上に Gibbs measure が連続濃度個存在し, それらは全て強い混合性 (K-system) をもつエルゴード的測度である。