数理解析研究所講究録
174巻 1973年 235-237

天然ガスの拡散や太陽の紅炎の持続を記述する縮退した非線型発展方程式のオレイニクの意味の弱解の非線型半群論的構成法 —— Abstract ——

東大 理　小西芳雄

次の非線型拡散問題を考える: $u = u(t, x)$ として

(1.1) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$,

(1.2) $u(0, x) = u_0(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$,

(1.3) $u(t, -\pi) = u(t, \pi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$;

ここに φ は $\mathbb{R}$ 上の連続, 単調増加函数とする.

最近の非線型半群の理論を使うと, φ が必ずしも微分可能でなくとも $(\varphi(u_0)$ にある程度の滑らかさを仮定すれば")
(1.1)-(1.2)-(1.3) のオレイニクの意味の弱解[1)]が構成できる.

<u>定義</u>. $u \in C([0, T] \times [-\pi, \pi])$ が (1.1)-(1.2)-(1.3) の弱

1) Олейник, Калашников, Юй-Линь : Известия Ак. наук СССР 22 (1958), 667-704.

解であるとは次の事が成立することとしよう：

(1.4) $u(t,-\pi) = u(t,\pi)$, $\forall t \in [0,T]$,

(1.5) $\dfrac{\partial \varphi(u)}{\partial x} \in L^\infty((0,T)\times(-\pi,\pi))$

(1.6) $\displaystyle\int_0^T dt \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\frac{\partial f}{\partial t} u - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}\right] + \int_{-\pi}^{\pi} f(0,x)\, u_0(x)\,dx = 0$

$\forall f \in C^1([0,T]\times[-\pi,\pi])$ s.t.

$f(T,x) = 0, \forall x \in [-\pi,\pi]$, $f(t,-\pi) = f(t,\pi), \forall t \in [0,T]$.

一意性はオレイニクと同様に出来る。

解の存在定理：

定理 u_0 は次を満足するとしよう：

(1.7) $\varphi(u_0)$, $\dfrac{d\varphi(u_0)}{dx}$, $\dfrac{d^2\varphi(u_0)}{dx^2} \in L^1(-\pi,\pi)$

(1.8) $u_0(-\pi) = u_0(\pi)$, $\dfrac{d\varphi(u_0)}{dx}(-\pi) = \dfrac{d\varphi(u_0)}{dx}(\pi)$.

このとき (1.1)-(1.2)-(1.3) の弱解は存在する。

この定理の証明の方法は大体次のようである：

$$A : D(A) \subset L^1(-\pi,\pi) \longrightarrow L^1(-\pi,\pi)$$

を
$$D(A) = \left\{ u \in L^1(-\pi,\pi);\ \varphi(u),\ \frac{d\varphi(u)}{dx},\ \frac{d^2\varphi(u)}{dx^2} \in L^1(-\pi,\pi)\right.$$
$$\left. 且\ u(-\pi)=u(\pi),\ \frac{d\varphi(u)}{dx}(-\pi) = \frac{d\varphi(u)}{dx}(\pi) \right\}$$
$$Au = \frac{d^2\varphi(u)}{dx^2}$$

と定義すると A は dissipative 且 $R(I-\lambda A) \supset D(A)$ $\forall \lambda > 0$ が証明出来る。従って Crandall - Liggett [2)] の意味で $L^1(-\pi,\pi)$

2) Crandall and Liggett : Amer. J. Math. 93 (1971), 265-298.

上の縮小半群 $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ が定義される。 $u(t)=e^{tA}u_0$ が求めるものである。

以上詳細は次の論文を参照されたい:

Une méthode de résolution d'une équation d'évolution non linéaire dégénérée. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (à paraître).