数理解析研究所講究録
174巻 1973年 51-62

ある種の相互作用をもつMarkov過程
——その分枝過程との関係

広島大理　高橋陽一郎

§0. 序

0. これから述べようとするクラスの，相互作用をもつマルコフ過程は，特殊なクラスのBoltzmann型の方程式に関する確率論的研究*) から派生したもので，一般の相互作用を記述するには程遠く，生物モデルへの応用はまだ考えられない．しかし，確率論において非線型現象と関連するものとしては最も深く研究されている分枝マルコフ過程とは《双対》の関係にあり，それ自身の構造も簡明なので，今後の研究の何らかの手がかりを提供できるかもしれない．

1. 最初に簡単な例で話をする．次の常微分方程式を考えてみよう：

$$\frac{du}{dt} = u(t)^2 - u(t), \quad u(0) = f. \quad (0 \le f \le 1)$$

この方程式は分枝過程に対する発展方程式の最も簡単な例（pure birth process !!）であると同時に，Boltzmann型の方程式（の

*) 上野正，田中洋 両先生の論文を参照して頂きたい．

同値な変形）の例であるとも考えられ，後者の見方で，解は

$$(\mathrm{W}) \qquad u(t) = u(t\,;f) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} f^n$$

と表現される．これは Wild's sum と呼ばれる公式の最も特別な場合である．この式自体は，前者の解釈でも成立しているわけだが，その場合には，branching property と呼ばれる性質を示している．

この 2つの解釈に従って 2つのマルコフ過程を作ることができる．前者に対応するものを (x_t^B)，後者に対して (x_t^I) をそれぞれ次の遷移確率によって定める．またその遷移半群を $(T_t^B)_{t\geq 0}$, $(T_t^I)_{t\geq 0}$ と書くことにする：（$n, m \geq 1$，整数；$t \geq 0$）

$$p^B(t,n,m) = \binom{m}{n} e^{-nt}(1-e^{-t})^{m-n}$$

$$p^I(t,n,m) = \binom{n-1}{m-1} e^{-mt}(1-e^{-t})^{n-m}$$

ただし $\binom{m}{n} = 0$ $(n>m)$ と約束しておく．(x_t^B) は pure birth process とでも呼ぶにふさわしい分枝過程であり，後者は単調に粒子数（$= x_t^I$ の値）が減っていく．その減少を相互作用の結果と見なすことにしよう．以下，(x_t^B) に対しては，f や $u(t)$ を一点からなる空間上の函数，(x_t^I) に対しては測度と見る．$\hat{f}(n) = f^n$ と書くことにすれば，

$$(\mathrm{B}1) \qquad T_t^B \hat{f}(n) = T_t^B \hat{f}(1)^n$$

$$(\mathrm{I}1) \qquad \hat{f}\, T_t^I\{n\} = \hat{f}\, T_t^I\{1\}^n \qquad (n \geq 1,\ t \geq 0,\ 0 \leq f \leq 1)$$

この最初の式(B1)が branching property と呼ばれるものである．さらに，$*$によって通常のたたみ込みを表せば，

(B2) $$(\mu*\nu)T_t^B=\mu T_t^B*\nu T_t^B$$

(I2) $$T_t^I(\varphi*\psi)=T_t^I\varphi*T_t^I\psi$$

が成立する．ただし，μ,νは$\{1,2,\cdots\}$上の測度，φ,ψは函数である．(B2)は連続状態の分枝マルコフ過程で良く知られた性質（定義そのもの）であり，(I1)及び(I2)は Boltzmann 型の方程式の確率論的研究に現れる性質である．([2],[3],[6])

2．これから述べようとするのは，一般の空間（今の場合は，一点であった）に対して適当な空間（$\{1,2,\cdots\}$に相当する）を構成し，そこで(I1)または(I2)（これらは互に同値となる．逆に言えば，積$*$をそうなるように定義する）をみたすマルコフ過程はどんな構造をもっているのか，そして，(B1)〜(I2)から予想されることであるが，分枝マルコフ過程と何らかの意味で双対関係にあるのではないか，この2つの問題を調べることである．上の例においては，適当な excessive な測度に関して互に双対であるだけでなく，L_nを状態nからの last exit time とするとき，さらに，

$$P(x^I_{(L_n-t)-}=m)=P(x_t^B=n\mid x_0^B=m)$$

即ち，(x_t^B)は，(x_t^I)の reversed process であることがわかる．

§1. 簡単な相互作用をもつマルコフ過程

a. これから取り扱うマルコフ過程は，ある空間（以下compact Hausdorffで可算基をもつとしよう）Qの上を運動する複数の粒子を記述している．n粒子が存在している状態を記述するためには，$Q^n = \overbrace{Q\times\cdots\times Q}^{n}$ をとるよりは，分枝マルコフ過程でもそうであったように，そのn粒子が互に区別されないものとして，n重対称積Q_n即ち，Q^nの座標の置換による商空間を採用する．さらに粒子の増減現象が本質的であるのでそれらの直和 $S=\bigcup_{n\geq 1} Q_n$ を状態空間として考えることにする．この空間は，自然に，局所compactで可算基をもつ位相が定義されている．以下簡単のため，函数はすべて連続なものに，測度はRadon測度≥ 0に限っておくことにする．また，S上の函数は，$\bigcup_{n\geq 1} Q^n$ 上の函数で座標の置換に関して不変なものと同一視するのが証明その他のためには便利である．

1. 序に述べたように，遷移半群の乗法性（I.2）によって相互作用の定義としたい．そのために，S上の連続函数のつくる空間$C(S)$に，次のような積$*$を定義する：$(\varphi, \psi\in C(S))$

$$(\varphi*\psi)(x_1,\cdots,x_n) = \mathrm{Sym.}\sum_k \varphi(x_1,\cdots,x_k)\psi(x_{k+1},\cdots,x_n)$$

ただし，Sym.は，$x_1,\cdots,x_n\in Q$についての対称化を意味する．分枝過程との対比のために，S上の測度μ,νの積 $\mu*\nu$ を

$$(\mu*\nu)(E_1\times\cdots\times E_n) = \mathrm{Sym.}\sum_k \mu(E_1\times\cdots\times E_k)\,\nu(E_{k+1}\times\cdots\times E_n)$$

と定義しておこう．ここで E_i は Q の Borel 集合，$Sym.$ は対称化作用素である．さらに，Q 上の函数 f に対して，$\mathfrak{S}$ 上の函数 $\hat{f}$ を，$\hat{f}(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1)\cdots f(x_n)$ によって，Q 上の測度 m に対して $\mathfrak{S}$ 上の測度 $\hat{m}$ を，$\hat{m}(E_1\times\cdots\times E_n)=m(E_1)\cdots m(E_n)$ によって定義する．

$\mathfrak{S}$ 上の Markov 過程は，その遷移半群 $(T_t)_{t\geq 0}$ が性質 (B1) をみたすときに分枝性を持つと呼ばれ，それは (B2) と同値であったことを思い起こして頂きたい．(今の場合についてあらためて書けば，次のようになる：

(B1) $\qquad T_t\hat{f}(x_1,\cdots,x_n)=T_tf(x_1)\cdots T_tf(x_n)$

(B2) $\qquad (\mu*\nu)T_t = \mu T_t*\nu T_t$

ただし，f は Q 上の函数で，$0\leq f\leq 1$，μ,ν は $\mathfrak{S}$ 上の有限測度)

そして，Boltzmann 型の方程式に現れる性質

(I1) $\qquad \hat{m}T_t(E_1\times\cdots\times E_n)=\hat{m}T_t(E_1)\cdots\hat{m}T_t(E_n)$

(I2) $\qquad T_t(\varphi*\psi) = T_t\varphi * T_t\psi$

ただし，m は Q 上の測度，φ,ψ は $\mathfrak{S}$ 上の函数．

<u>定義</u>．$\mathfrak{S}$ 上のマルコフ過程が相互作用を持つとは，その遷移半群が性質 (I2) をみたすことである．

上の 2 つの性質 (I1) と (I2) は互に同値である．直観的に言えば，このようなマルコフ過程は，いくつかの粒子の存在するとき，その間にある時刻に突然相互作用が働き（例えば，

魚がとも喰いをする)，何粒子かが消滅する，その繰り返しを記述している．実際には，可算個の粒子の間に相互作用，例えば衝突があり，その結果において衝突した一方の粒子を，"忘れてしまう"（Boltzmann方程式はその導出の際の仮定から同じ粒子は2度と衝突し合わないから正当化される）ことに対応しており，それ故に構造が簡明であると同時に相互作用らしくない相互作用を記述していることになる．

2. 分枝マルコフ過程については，それが，あるQ上のマルコフ過程（base process と呼ばれる），あるマルコフ時刻（分枝時刻と呼ばれる），及びマルコフ核（分枝法則）によって完全に決定されることが知られている．[1] 全く同様のことが成立することは，[1]の証明を見なおせば殆ど明らかであるが，以下では構造を決定している量が見やすい形になる場合について述べてみよう．以下，(X_t, P_x) を S 上定義された相互作用をもつ C_0-Feller過程とし，劣マルコフ核

$$\pi(x, E) \equiv P(X_\tau \in E \mid X_{\tau-} = x) \quad (x \in S, E \subset S)$$

及び

$$g(x) \equiv -\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} P_x(\tau \leq t) < +\infty \quad (x \in S)$$

の存在を仮定する．ここで，$\tau = \tau(\omega)$ は粒子数の最初に変化する時刻，即ち，$X_0 \in Q_n$ のとき Q_n からの last exit time（実は，first exit time に等しい）とする．また，τ を interaction time，g をその rate，π を interaction law と呼ぶことにしたい．さ

らに，粒子数が変化するまでの運動，即ち，$(X_t, P_x, x\in Q)$ を時刻 τ で殺したマルコフ過程，を変化する直前の位置 $X_{\tau-}$ から繰り返しつないで得られる Q 上のマルコフ過程を，base process と呼ぶ．このとき次の分解定理が成立する．

<u>定理</u> i) $\bar{k}, \bar{\pi}$ は次の性質をもつ：

(1) $$\bar{k}(x_1,\dots,x_n) = k(x_1)+\cdots+k(x_n) \qquad (k(x)\equiv\bar{k}(x),\ x\in Q)$$

(2) $$\Pi(\varphi*\psi) = \Pi\varphi*\psi + \varphi*\Pi\psi$$

ただし，Π は S から S への非負核で

(3) $$\Pi(\bar{x}, E) = \bar{k}(\bar{x})\bar{\pi}(\bar{x}, E) \qquad (\bar{x}\in S,\ E\subset S)$$

ii) とくに，$\bar{k}$ 及び $\bar{\pi}$ は，k 及び π によって完全に定まる．ただし，$\pi(\bar{x}, E)$ は $\bar{\pi}(\bar{x},\cdot)$ の Q への制限 $(\bar{x}\in S)$．

iii) $(X_t, P_{\bar{x}})$ は，base process の直積を rate $\bar{k}$ で $\bar{\pi}$ に従って jump させ，そこから base process をつなぎあわせることを繰り返して得られるマルコフ過程と同値である*)．

4. 逆に，base process となるべきマルコフ過程 (x_t, P_x) interaction rate k，及び substochastic kernel $\pi(\bar{x}, E)$ が与えられたとき，(1)〜(3) によって $\bar{k}$ 及び $\bar{\pi}$ を定義することができ，相互作用をもつマルコフ過程が構成できるが，もちろん一般には一意性は成立しない．証明は分枝マルコフ過程の場合と全く同様である．なお，この構成は，次のような測度 $u(t,E)$ $(E\subset Q,\ t\geq 0)$ に対する非線型方程式を解くことと同値である：

*) 正確な iii) の記述は，[1] のようにするべきであるが ここでは省略させて頂く

$$(4)\qquad \frac{\partial u(t,E)}{\partial t} = Au(t,E) + \sum_{k\geq 2}\int_Q\cdots\int_Q u(t,dx_1)\cdots u(t,dx_n)\,\pi(x_1,\cdots,x_n,E)\,g(x_1) - \int_E u(t,dx)\,g(x)$$

($u(0,E)$ given)

ここで，Aは，base process (P_x, x_t) の生成作用素とする．

5. 相互作用をもつマルコフ過程は，(1), (2) のような生成作用素の derivation 性によって特徴づけられると同時に，その potential operator V によっても次のように特徴づけられる．

$$(5)\qquad V\varphi * V\psi = V(V\varphi * \psi) + V(\varphi * V\psi)$$

ここで，Vは，　$V\varphi(x) = \int_0^\infty T_t\varphi(x)\,dt$　によって定義され，有界な函数を局所有界な函数に写す．(従ってこのような半群に対してつねに存在している)

6. 注意 A) 上述の(4)は，とくに，$\pi(x,E)=0$ $(x \notin Q_2)$ とすれば，空間的に一様な cut-off の場合の Boltzmann 型の方程式と同値になる．（次節の Kac's caricature がその例である）

B) 以上の議論は解析的には，与えられた Banach 空間（上の場合 $C(Q)$ ）から適当な semisimple な可換 Banach 環（上の場合，$\{\varphi \in C(S) \mid \sup_n \sup_{Q_n} |\varphi(x)| < +\infty\}$ にとると都合がよい）を作ることにより一般化される．このとき，(4) に対応する非線型発展方程式の解として得られる半群は，与えられた Banach 空間の双対空間の閉単位球をそれ自身に写す非線型半群であり，

線型の場合の(C_0)半群のひとつの拡張ではあるが，通常の(Kato-Komuraの)非線型半群とは異なるクラスである．

C) 一般に，semisimpleな可換Banach環において，半群が乗法的であることと，その生成作用素のderivation propertyは同値である．

§2. 分枝過程との関係

1. 既に序で述べたように，相互作用のあるマルコフ過程と分枝マルコフ過程との間にはある種のdualityが成立することが予想される．その際，函数と測度の役割が入れ替るはずであるから，代数的な構造が対応するための条件として次のような状況を設定することは自然であろう：(P_x, X_t)を$\mathcal{S}$上のマルコフ過程，その遷移半群$(T_t)_{t\geq 0}$は遷移核$P(t,x,E)$ $(x\in\mathcal{S}, E\subset\mathcal{S})$をもち，sub-invariantな測度$\mu$であるQ上の測度$m\geq 0$に対して$\mu=\hat{m}$と書けるものが存在すると仮定する．即ち，

(1) $$\int \mu(dx)P(t,x,E)\leq\mu(E) \qquad (E\subset\mathcal{S},\ t\geq 0)$$

(2) $$\mu(E_1\times\cdots\times E_n)=\mu(E_1)\cdots\mu(E_n) \quad (n\geq 1,\ E_i\subset Q)$$

このとき次の定理が成立する．

<u>定理</u> $(\hat{T}_t)_{t\geq 0}$を，$(T_t)_{t\geq 0}$とμに関して双対な関係にある半群，i.e. $\int \varphi(x)T_t\psi(x)\mu(dx)=\int \psi(x)\hat{T}_t\varphi(x)\mu(dx)$，とすれば，一方

が分枝半群であることと，他方が相互作用をもつこととは同値である．

証明は μ と絶対連続な測度を，その Radon-Nikodym 導函数に対応させることで与えられる．この対応は(2)の仮定によって代数としての準同型写像となる．

2. 例． (P_x, X_t) が Q 上の函数 $g(x)$ と，S から Q への核 $\pi(x, E)$ によって構成された相互作用のあるマルコフ過程とする．ただし，base process は，$x_t \equiv x_0$ としておく．もし，$\pi(x, E) = 0 \quad (x \notin Q_2)$ とすれば，条件(1)は，

$$(3) \qquad \int_Q \int_Q m(dx) m(dy) g(x) \pi(x, y; E) \leq \int_E m(dx) g(x)$$

と同等である．

Boltzmann 方程式の Kac による model を考えてみよう：

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t, x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \{u(t, x^*) u(t, y^*) - u(t, x) u(t, y)\} dy \quad (t \geq 0) \\ u(t, x) \text{ は } x \text{ について確率密度函数，} \quad u(0, x) = f(x) \text{ given} \end{cases}$$

ここで，$x^* = x \cos\theta - y \sin\theta$，$y^* = x \sin\theta + y \cos\theta$．この方程式は，確率測度 $u(t, E)$ に関する次の方程式と同値である：

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t, E) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, dx) \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, dy)\, g(x) \{\pi(x, y, E) - \delta(x, E)\} \\ u(0, E) = f(E) \quad \text{given.} \end{cases}$$

ここで，

$$\pi(x, y, E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(x^*, E)\, d\theta, \qquad g(x) \equiv 1.$$

従って，Q を $\mathbb{R}^2$ の一点コンパクト化として今までの議論にあ

てはまり，mとして任意のGauss測度をとれば，(3)が等号で成立する，

8. さらに特別な場合については，相互作用をもつマルコフ過程の時間の流れを逆に見たものは分枝マルコフ過程であることがわかる．

系　(P_x, X_t)を相互作用のあるマルコフ過程とする．Q上の確率測度mが存在して，$\mu_p = \overbrace{m\otimes\cdots\otimes m}^{p}$ on Q_p, $=0$ off Q_p とおくとき，ある定数c_{pq} $(q\leq p)$に対して

$$\text{(6)} \qquad \mu_p V|_{Q_r} = c_{pq}\mu_q V|_{Q_r} \qquad (\forall r \leq \forall q \leq p)$$

が成立すると仮定する．このとき(P_{μ_p}, X_t)を任意のexit timeで逆にしたものはマルコフ過程であって，定義されている範囲である分枝マルコフ過程と一致する．

注意．reversed process $(P_{\mu_p}, \hat{X}_t)$が定義されているのは$\hat{X}_t \in \bigcup_{k=1}^{p} Q_k$のときに限っている．

証明は，直接には，M. Weil (Sem. on Prob.　, Strasbourg)を適用すればマルコフ性がわかり，(5)によって代数的構造の対応がわかるので分枝性が導かれる．

文　献

[1] N. Ikeda, M. Nagasawa, S. Watanabe ; Branching Markov Processes I, II, III. J. Math. Kyoto Univ. 8 (1968), 9 (1969)

[2] H. P. McKean Jr., An exponential formula for solving Boltzmann's equation for a Maxwellian Gas. J. Combi. Th. 2 ('67)
[3] H. Tanaka, Propagation of Chaos for certain purely discontinuous Markov processes with interaction. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec 1. 17 ('70)
[4] S. Watanabe, A limit theorem of branching process and continuous state branching processes. J. Math. Kyoto Univ. 8 ('68)
[5] S. Tanaka, An extension of Wild's sum for solving certain non-linear equation of measures Proc. Japan Acad 44 ('69)
[6] T. Ueno, A class of Markov processes with interaction I, II Proc. Japan Acad 45 ('69).