数理解析研究所講究録
175巻 1973年 55-65

複素多変数最大過剰決定系
その他の話題

吉田正章

§0 序

Gaußの超幾何函数の二変数への拡張として、Appellは、F_1, F_2, F_3, F_4 なる二変数超幾何函数を定義した。後に正確に述べるが、これらは、線型、二階、確定特異点のみをもつ最大過剰決定系の解である。これらの方程式で、y＝一定とおいて、xに関する常微分方程式に直したとき、その決定方程式の根の差が整数になっている所があることに気が付く。このことは、x＝一定としても同じである。即ち、y＝一定、あるいはx＝一定 と切ってみると、非常に特殊な常微分方程式がならんでいる訳である。その理由を知る為に、§1で、Fuchsの関係式を多変数にも使えるように書き直し、§2で、多変数Fuchs型微分方程式とそのexponentsを定義し、そして、§3で、応用として、先述の理由を考える。§4では、今までと全く別な問題を提起する。

§1 Fuchsの関係式の多変数への拡張

M : compact complex manifold of dimension n

S_i : non-singular divisor of M

$S = \bigcup S_i$ (normal crossing)

$\mathcal{V}$: holomorphic vector bundle over M of dim. r

∇ : Sにのみ regular singular point をもつ$\mathcal{V}$の integrable connection（定義は Deligne Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers による）

（$\mathcal{V}$, ∇）を与えるということは，局所的には，行列方程式 $dX = \Omega X$，を与えることである。ここで，Ω は meromorphic 1-form の matrix で，$d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0$（integrability condition）．また regular singular ということは，Sにのみ poles を持つ meromorphic invertible matrix A でもって，変数変換 $X = AY$ を行えば，

$$dY = \left(\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \frac{dx_i}{x_i} \right) Y \qquad \text{------}(1)$$

Γ_i : holomorphic，　$\bigcup \{x_i = 0\} \supset S$

と出来ることである。

我々は，$\Gamma_i(0)$ の固有値の間に成り立つ関係を調べたい。上のような，全く一般の situation で，すべての関係を求め，それらの関係を満せば，逆に，方程式（∇）が存在するということまでやるのが理想なのであるが，ここでは，非常

に特殊な situation で しかも不完全なことしか出来ない。

［一変数の場合］

$M=\mathbb{P}^1$ 上の r 階 Fuchs 型 常微分方程式. 特異点 $a_1, \cdots, a_m, \infty$ を $\mathcal{V}$ として $r-1$ 次の Jet bundle を取って. $dX=\Omega X$ と書き直すと. a_j における決定方程式の根は. Ω の a_j での residue の固有値 α_{ji} $(i=1,\cdots,r)$ になり. 一変数の Fuchs の関係式は. α_{ji} 間に成り立つ唯一の関係式である。 逆に Fuchs の関係式をみたすように α_{ji} を与えると. 微分方程式は存在する。

さて. X を $dX=\Omega X$ の 基本行列解とすると. 上の Fuchs の関係式 は.

$$\det X \cdot \prod_{j=1}^{m} (x-a_j)^{-\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ji}}$$

が. 多項式. 従って. ∞ で 分岐 しないことを. $\alpha_{\infty i}$ との関係で保障している。 この形にしておけば. 單独高階でなくとも. 一般の行列方程式 $dX=\Omega X$ にも適用できる。 後に使うから Fuchs の関係式を具体的に書いておく。

$$\sum(\text{決定方程式の根}) = \frac{1}{2}(m-1)r(r-1) \cdots \quad (2)$$

［多変数の 場合］

問題を以下のように非常に特殊にする.

$M=\mathbb{P}^n$, $\quad dX=\Omega X$, $\quad d\Omega-\Omega\wedge\Omega=0$

regular singular type

$S_i = \{f_i = 0\}$. f_i : irreducible polynomial

S_∞ = 無限遠平面.

この situation で, $dX = \Omega X$ の基本行列解を X.

(1) において, $\Gamma_j(0)$ の固有値を α_{ji} $(i=1,\cdots,r)$

とする。このとき,

$$\det X \cdot \prod_j f_j^{-\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ji}} \quad \cdots\cdots (3)$$

は多項式. 従って S_∞ で分岐しないということを,

$\alpha_{\infty i}$ を使って言えばよい。

ここで $\Gamma_j(0)$ は. 対角化可能とする。(§2 の仮定 1)

以上 $S = \cup S_j$ は normal crossing として来たが,

そうでなくともよいことは, 簡単にわかる。

§2. 微分方程式 E の定義.

定義 微分方程式 E とは. 有理式係数の線型微分作用素のなす ring $\mathcal{D} = \mathbb{C}(x_1,\cdots,x_n)[\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}]$ の左- ideal である。

$\mathcal{D}$ は左ネター故. E は有限個の元で生成される。また E は線型故、ある divisor $S \subset \mathbb{P}^n$ を除いた点で局所的な. 正則解を持つ。

定義. $\mathbb{P}^n - S$ のすべての点での局所的正則解のなす線型空間の次元が有限のとき、E を最大過剰決定系という。

このとき. 局所解はすべて. $\mathbb{P}^n - S$ のどんな道にそっても

解析接続できるから、$\widetilde{\mathbb{P}^n - S}$ 上の正則関数を定義する。これを大域的解という。局所解と大域解の次元は等しいから、これをEの rank という。

rank r の微分方程式 $Ez=0$ を考える。

$z_1 = z$ とし、z_i として、適当な（Eによって決る）z の偏微分 $\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} z / \partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n$ を取り、

$$\mathfrak{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} \quad \text{と置いて、} Ez=0 \text{ を} \quad d\mathfrak{z} = \Omega\, \mathfrak{z} \quad \cdots (4)$$

と書き替えることが出来る。ここで、

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \, dx_i$$

Γ_i : 成分 $\mathbb{C}(x_1, \cdots, x_n)$ の $r \times r$ matrix.

$$d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0 \quad \cdots (5)$$

このとき、Eの特異点集合 S は、Ω の poles と無限遠平面である。

定義　E に対応する行列方程式 $dX = \Omega X$ が、§1の意味で、S で regular singular type のとき、Eは Fuchs 型と言う。

$S = \cup S_i$　(irreducible decomposition)

$S_i = \{ f_i = 0 \}$　　$f_i \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$

S_∞ : 無限遠平面.

仮定 1（log 無し） rank r の Fuchs 型微分方程式 E において，$\forall P \in S_k - \bigcup_{j \neq k} S_j$ での局所解空間の基底として，

$$\begin{cases} z_1 = f_k^{\alpha_{k1}} \cdot h_1 \\ \vdots \\ z_r = f_k^{\alpha_{kr}} \cdot h_r \end{cases}$$

が取れる。 ここで，$\alpha_{kj} \in \mathbb{C}$ は．f_k のべき，h_j は P で正則で，h_j / f_k は正則でないとする。

この仮定は (1) の $\Gamma_i(0)$ が対角化可能ということであり．Fuchs 型常微分方程式での log 無しの条件に対応している。

一度仮定が満たされると、適当な線型変換を行って．基底を取り直して，$\alpha_{ki} \neq \alpha_{kj}$ $(i \neq j)$ と出来．そのとき α_{kj} $(j=1,\cdots,r)$ は．E と S_k によって．一意的に定る。

定義 上のように取った $\{\alpha_{kj} \,;\, j=1,\cdots,r\}$ を．S_k における E の exponents と言う。

§ 3 exponents に関する注意．

定義 二変数，rank 3，Fuchs 型，特異点集合 S は．$\{x=0\}$, $\{x=1\}$, $\{x=\infty\}$, $\{y=0\}$ $\{y=1\}$, $\{y=\infty\}$, $\{x=y\}$ なる，仮定 1 をみたす方程式 E を．$(E, S)_3$ と書く．

以下 $(E,S)_3$ について考察するが、同様のことが、多変数、rank：一般、S：一般 についても成立する。

$(E,S)_3$ について (4) は、

$$d\begin{bmatrix} z \\ p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \Omega & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ p \\ q \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots \quad (6)$$

となる。ここで、$p=\frac{\partial}{\partial x}z$, $q=\frac{\partial}{\partial y}z$.

$(E,S)_3$ について、各特異曲線での exponents を $\{\alpha_{0i}\}$, $\{\alpha_{1i}\}$, $\{\alpha_{\infty i}\}$, $\{\beta_{0i}\}$, $\{\beta_{1i}\}$, $\{\beta_{\infty i}\}$ $\{\alpha_{yi}=\beta_{xi}\}$ $i=1,2,3$ とする。特異曲線は、前ページの定義の順序にならべた。

§1 に述べた方針に従って、(3)を計算する。$X(x,y)$ を、(6) の基本行列解とする。

$$\varphi(x,y) = \det X(x,y)\cdot x^{1-\sum\alpha_{0i}}(1-x)^{1-\sum\alpha_{1i}}y^{1-\sum\beta_{0i}}(1-y)^{1-\sum\beta_{1i}}(x-y)^{2-\sum\alpha_{yi}}$$

と置く。

例えば、$\{x=0\}$ において、

$$\det X(x,y) = \mathrm{const}\begin{vmatrix} x^{\alpha_{01}}h_{11} & x^{\alpha_{02}}h_{12} & x^{\alpha_{03}}h_{13} \\ x^{\alpha_{01}-1}h_{21} & x^{\alpha_{02}-1}h_{22} & x^{\alpha_{03}-1}h_{23} \\ x^{\alpha_{01}}h_{31} & x^{\alpha_{02}}h_{32} & x^{\alpha_{03}}h_{33} \end{vmatrix}$$

(h_{ij} は正則函数) となるから, 他の特異曲線においても同様で, $\varphi(x,y)$ は $\mathbb{C}^2$ で一価正則函数である。E が Fuchs 型なることを思い出せば, $\varphi(x,y)$ は実は多項式である。

次に, $c \neq 0, 1, \infty$ として, x の多項式 $\varphi(x,c)$ の次数は, 上と同様な計算により,

$$-(\sum\alpha_{\infty i}+1)-\sum\alpha_{0i}+1-\sum\alpha_{1i}+1-\sum\alpha_{yi}+2 = 3-\sum_{i=0,1,y,\infty}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij} \quad \cdots\cdots (7)$$

となる。

今, 各特異曲線での exponents の差が整数でないとしてみよう。すると, 我々が §2 で定義した exponents α_{ij} は, $\{y=c\}$ で E を切ったときに現れる, 三階の $0, 1, y, \infty$ に確定特異点をもつ常微分方程式の決定方程式の解に一致する。このことに注意すると, (2) より,

$$\sum_{i,j}\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(3-1)\,3\,(3-1) = 6$$

(7) に代入すれば, 多項式の次数が -3 となり, 矛盾を生じる。

即ち, $(E, S)_3$ の exponents の差は, どこかで整数でなくてはならない。

これで，Appell の F_1 が，§0 で言ったように，$\{y=c\}$ としたとき，非常に特殊な常微分方程式になっている理由が分った。また，上の議論は $(E,S)_4$ についても全く同様に成り立つから，Appell の F_2, F_3, F_4 についても，先述の理由が分るのである。

なお，Appell の $F_1, \cdots, F_4$ についての具体的なことは，Appell et Kampé de Feriet の古い本 Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques にくわしく出ている。

§4

M: compact complex manifold of dimension n.
このとき，M上の流れ X とは，$\{U_i\}$ というMの open covering と，U_i 上で定義された，holomorphic vector field X_i とがあり，$U_i \cap U_j$ 上で，ある meromorphic function f_{ij} があって，$X_i = f_{ij} X_j$ となっている system $\{U_i, X_i\}$ のこととする。

$X(P)=0$ なる点 $P\in M$ を流れ X の essential singular point という。(ペトロフスキーの用語)

$\{X_i\}$ の積分多様体を次々に連いでいった，X の積分多様体を，X の orbit 又は leaf という。

$$K(X) := \{F \mid \exists S_F \text{ analytic set in } M \quad M-S_F \text{ で，} F \text{ は一価正則 かつ } X\cdot F = 0\}.$$

即ち，$K(X)$ とは，各 leaf 上 constant なる一価解析函数の全体である。また $K(X)$ は $\mathbb{C}$ 上の体である.

$$S = \bigcap_{F\in K(X)-\mathbb{C}} S_F$$

を，X 固有の singular set という。

以下 $M=\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$X = Q\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial y}$$

$Q, P \in \mathbb{C}[x,y]_n$ (n次多項式)

に限って，問題を列挙する。

[1] closed orbits が出て来るのは，どんな場合か.

[2] このとき orbit の genus は，P, Q からどうして分るか。

これは，常微分方程式

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P}{Q}$　の動く分枝点とその分枝度で決る.

[3]　殆んどのXに対して $K(X) = \mathbb{C}$ であるが，

$K(X) \neq \mathbb{C}$ なる　Xはどんなものか。

essential singular points での local な性質では，

$K(X) \neq \mathbb{C}$ の為の必要条件しか出ない。

[4]　Essential singular point での local な，

orbit の配列

[5]　X 固有の singular set S は，Q, P から

いかに決るか.

local theory は，

Poincaré　全集才一巻，才三巻

Picard　Traité D'analyse　Tome III

福原－木村－松田　数学会 パブリケイション

$n = 2$ のときの grobal theory は.

Petrovski - Landis　1955

Mat. Sb (N.S)　37 (79)　209～250

Bautin　1952

Mat. Sb (N.S)　30 (72)　181～196