数理解析研究所講究録
175巻 1973年 23-42

初等函数による積分表示と最大過剰決定の差分系及び漸近展開

東大 教養 青本和彦

§1. 存在定理

$A_i(x)$ $(x \in \mathbb{C}^n)$ $(1 \leq i \leq n)$ を $GL(m, \mathbb{C})$ に値をとる $\mathbb{C}^n$ 上の有理行列函数達とする。我々は次の問題を考える：

[問題I] $\mathbb{C}^n$ 上の有理型 $GL(m, \mathbb{C})$-値函数 $\Phi(x)$ で

(1,1) ⋯⋯ $\Phi(x + e_i) = A_i(x)\Phi(x)$

を満たすものをある標準的な方法で求めること。但し $e_i = (0, \cdots, 0, \underset{(i\text{番目})}{1}, 0, \cdots, 0)$ とする。

まず $A_i(x)$ は整積条件

(1,2) ⋯⋯ $A_j(x+e_i)A_i(x) = A_i(x+e_j)A_j(x)$

$(1 \leq i, j \leq n)$ を満たさなくてはならぬ。

$n = 1$ の場合 $A_1(x)$ が一般ならば ある決まった漸近展開を持つ (1,1) の解 $\Phi(x)$ が存在することは G.D. Birkhoff [1] によって

証明されている．我々はこれを $n \geqq 2$ の場合に拡張しその際起る問題点に言及する．

まず存在定理について．

仮定 I　　$x_1 = \infty$ において各 $A_i(x)$ を

$$(1,3)\qquad A_i(x) = A_i^{(0)}(x')x_1^{\mu_i} + A_i^{(1)}(x')x_1^{\mu_i - 1} + \cdots$$

$(1 \leqq i \leqq n,\ x' = (x_2, \cdots, x_n))$ とするとき

x' が $\overset{0}{x}{}'$ の近傍で

i) $\det A_i^{(0)}(x') \neq 0 \quad (n \geqq i \geqq 1)$

ii) $A_i^{(0)}(x') \quad (i \geqq 2)$ は常数 $(= A_i^{(0)}$ とおく$)$

iii) $A_1^{(0)}(x')$ の固有値 $\rho_1(x'), \cdots, \rho_n(x')$

は互いに相異なるとする．

この時

定理 I.　形式級数 $S(x)$

$$(1,4)\qquad S(x) = \left(1 + \frac{S^{(1)}(x')}{x_1} + \frac{S^{(2)}(x')}{x_1^2} + \cdots \right)$$

$\left(S^{(i)}(x')\text{ は } x' \text{ の有理式}\right)$ が存在して変換

$$(1,5)\qquad \Phi(x) = S(x)\Psi(x)$$

により (1,1) が

$$(1,6)\qquad \Psi(x + e_i) = B_i(x)\Psi(x)$$

に移ったとすれば　$B_i(x)$ は

$$(1,7)\quad \begin{cases} B_1(x) = x_1^{\mu_1}\left(A_1^{(0)} + \dfrac{A_1^{(1)}(x')}{x_1} \right) \\ B_i(x) = x_1^{\mu_i}\left(A_i^{(0)} + \dfrac{B_i^{(1)}(x')}{x_1} + \cdots\cdots \right) \end{cases}$$

$(i \geqq 2)$

の形を持つ．ここに $A_1^{(0)} = A_1^{(0)}(x')$ は x' に依らないことが証明され，又

$$(1,8)\quad A_1^{(1)}(x') = \sum_{i=2}^{n} \mu_i x_i\, A_1^{(0)} + A_1^{(1)}$$

($A_1^{(1)}$ 常数行列）の形に書ける．さらに $A_1^{(0)}, A_1^{(1)}, A_i^{(0)}, B_i^{(1)}(x'), \cdots$ は互いに可換で同時に対角化される．$A_1^{(1)}, B_i^{(1)}(x'), B_i^{(2)}(x'), \cdots$ 等はすべて一意的に定まる．

系．方程式 (1,4) は形式解

$$(1,9)\quad \Phi(x) = \left(1 + \frac{S^{(1)}(x')}{x_1} + \frac{S^{(2)}(x')}{x_1^2} + \cdots\right) \left(A_1^{(0)}\right)^{x_1} \cdot \left(A_2^{(0)}\right)^{x_2} \cdots \left(A_n^{(0)}\right)^{x_n} \cdot$$

$$\cdot\, x_1^{\mu_1 x_1} \cdot x_1^{(A_1^{(0)})^{-1} A_1^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \mu_j x_j},$$

を持つ．しかも，このような形のものは唯一つしかない．但し $S^{(j)}(x')$ の対角成分はすべて 0 とする．

G.D. Birkhoff によれば　仮定 I, のもとに (1,9) を漸近展開 $(x_1 \to \infty)$ として持つような解が唯一つ存在する。今

$$(1,10) \quad T_d(x) = \left(1 + \frac{S^{(1)}(x)}{x_1} + \cdots + \frac{S^{(d)}(x)}{x_1{}^d}\right) A_0^{x_1}\, x_1^{\sum_{j=2}^{n} \mu_j x_j + A_1^{(1)}}$$

と置き d を十分大にとれば　上記の解は

$$(1,11) \quad \Phi(x) = \lim_{\nu \to \infty} A_1(x) A_1(x-e_1) \cdots A_1(x-\nu e_1)\, T_d(x-\nu e_1)$$

によって得られる。但し ここで $\Phi(x)$ は $GL(m, \mathbb{C})$-値ではなく $GL(m,\mathbb{C})/\mathfrak{N}$-値（$\mathfrak{N}$ は $GL(m, \mathbb{C})$ の最大冪等部分群）とする。$GL(m,\mathbb{C})$-値とするためには G.D. Birkhoff にならって (1,11) を修正しなければならない。

<u>注意 1</u>. (1,11) において $\Phi(x)$ を $GL(m,\mathbb{C})/\mathfrak{B}$-値（$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{N}$ を含むある Borel 部分群）とするときは $T_d(x-\nu e_1)$ は不要。すなわち

$$(1,11)' \quad \Phi(x) = \lim_{\nu \to \infty} A_1(x) A_1(x-e_1) \cdots A_1(x-\nu e_1)$$

これは つまり 連分展開を一般化したものである．古典的には $m=2$ だから $GL(2,\mathbb{C})/\mathcal{L}$ は $\mathbb{P}^1$ であり $\Phi(x)$ は有理型函数を表わす．

§2. 遷移問題

$\{A_i(x)\}$ は (1,2) を満たすとき 1つの'cocycle' すなわち $H^1(\mathbb{Z}^n, GL(m,\mathbb{C}(x)))$ の元を決める．ところで $H^1(\mathbb{Z}^n, GL(m,\mathbb{C}(x)))$ に $GL(n,\mathbb{Z})$ が作用している．今 1つの cocycle $\{A_i(x)\}$ に対してある元 $\sigma\in GL(n,\mathbb{Z})$ が存在して $\sigma^*\{A_i(x)\}$ が仮定(1,1)を満たしているとしよう．このとき

$$(2,1)\quad y_i=\sigma(x)_i=\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}x_j \qquad (x\in\mathbb{C}^n)$$

とすれば $\sigma(x)_i=0$ は $\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}x_j=0\ (i\geq 2)$ に等しいから $\sigma(x$ x_1軸 L_1 は σ^{-1} により ある方向を持った直線 L_2 (y_1軸) に移される．故に (1,11) は L_2方向に漸近展開 (1,9) を持った (1,1) の解を標準的な方法で

与えることになる。ところで2つの方向 $\angle_1$ と $\angle_2$ に対して対応する漸近展開を(1,9)の形に与えたものを各々 $\Phi_{\angle_1}$ 及び $\Phi_{\angle_2}$ とする：

$$(2,2)\quad \Phi_{\angle_1} \sim \left(1+\frac{S^{(1)}(x')}{x_1}+\frac{S^{(2)}(x')}{x_1^2}+\cdots\right)\cdot \left(A_1^{(0)}\right)^{x_1}\cdots\left(A_n^{(0)}\right)^{x_n}\cdot$$
$$\cdot\, x_1^{\mu_1 x_1}\, x_1^{(A_1^{(0)})^{-1}A_1^{(1)}+\sum_{j=2}^{n}\mu_j x_j},$$

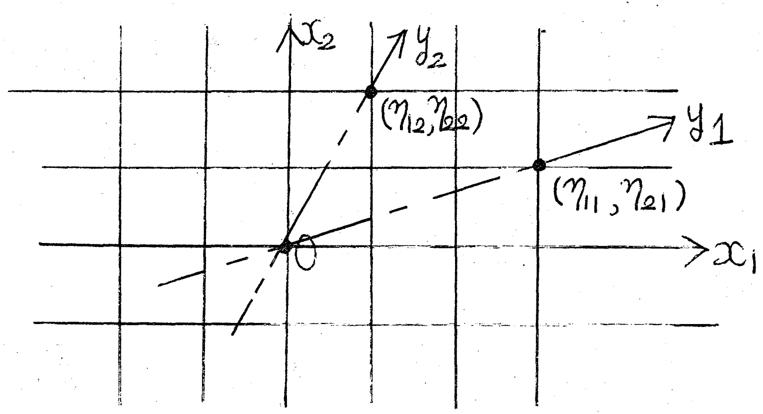
$$(2,3)\quad \Phi_{\angle_2} \sim \left(1+\frac{S^{(1)*}(y')}{y_1}+\frac{S^{(2)*}(y')}{y_1^2}+\cdots\right)\left(A_1^{*(0)}\right)^{y_1}\cdots\left(A_n^{*(0)}\right)^{y_n}\cdot$$
$$\cdot\, y_1^{\mu_1^* y_1}\cdot y_1^{(A_1^{*(0)})^{-1}A_1^{*(1)}+\sum_{j=2}^{n}\mu_j^* y_j};$$

(2,1)を逆にといて

$$(2,4)\qquad x_i=\sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}\,y_j$$

とすれば(1,2)を考慮して次の関係が得られる：
(簡単のために $\eta_{1i},\cdots,\eta_{ni}$ はすべて正として)

$$(2,5)\quad A_i^*(y)=A_n\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\eta_{ji}e_j+(\eta_{ni}-1)e_n+x\Big)\cdot$$
$$\cdots\cdots A_n\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\eta_{ji}e_j+x\Big)\cdot A_{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-2}\eta_{ji}e_j+(\eta_{n-1\,i}-1)e_{n-1}+x\Big)\cdot$$
$$\cdots\cdots\ \cdots\ \cdot A_1\big((\eta_{1i}-1)e_1+x\big)\cdots A_1(x)$$



(1,11) によれば　$GL(n,\mathbb{C})/\mathfrak{N}$ −値の函数として

(2,6)　$$\Phi_{Z_1}(x) = \lim_{\nu\to\infty} A_1(x)A_1(x-e_1)\cdots A_1(x-\nu e_1)T_d(x-\nu e_1)=$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} T_d(x)\, T_d(x)^{-1}A_1(x)T_d(x-e_1)^{-1}\cdot T_d(x-e_1)A_1(x-2e_2)\cdot$$

$$\cdot T_d(x-2e_2)^{-1}\cdot\cdots\cdots\cdot T_d(x-(\nu-1)e_1)^{-1}A_1(x-\nu e_1)T_d(x-\nu e_1)$$

ところで

(2,7)　$$T_d(x+e_1)^{-1}A_1(x)\,T_d(x) = \left(1+\frac{\Xi_d(x)}{x_1^d}\right)$$

とおくと

(2,8)　$$\Xi_d(x) = A_1^{(0)\,x_1+1}\left(1+\frac{1}{x_1}\right)^{-\sum_2^n \mu_j x_j - (A_1^{(0)})^{-1}A_1^{(1)}}\cdot x_1^{-(A_1^{(0)})^{-1}A_1^{(1)}}\cdot$$

$$\cdot\, U_d(x)\,(A_1^{(0)})^{x_1}\, x_1^{(A_1^{(0)})^{-1}A_1^{(1)}}$$　且つ $U_d(x)$

は　x の有理函数で　$x_1\to\infty$ のとき有界

(G. D. Birkhoff [7] Oeuvres Complets I p250)

すなわち　$U_d(x)$ は

$$(2,9)\quad \left(A_1^{(0)}\left(1+\frac{1}{x_1}\right)^{\sum_2^n \mu_j x_j + (A_1^{(0)})^{-1}A_1^{(1)}}\right. =$$

$$= A_1^{(0)} + \frac{A_1^{(0)}\sum_2^n \mu_j x_j + A_1^{(1)}}{x_1} + \frac{A_1^{(2)}(x_2)}{x_1^2} + \cdots + \frac{A_1^{(d)}(x_2)}{x_1^d} +$$

$$+ \frac{R_d(x_2)(x_1)}{x_1^{d+1}}$$ とおくとき

$$(2,10)\quad A(x)\,T_d(x) = T_d(x_1+1, x')\left(A_1^{(0)} + \frac{A_1^{(0)}\sum_2^n \mu_j x_j + A_1^{(1)}}{x_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{A_1^{(2)}(x_2)}{x_1^2} + \cdots + \frac{A_1^{(d)}(x_2)}{x_1^d} + \frac{U_d(x)}{x_1^{d+1}}\right),$$

によって定義される．無限級数 (2,6) の1列目は

$$(2,11)\quad \begin{cases} d \geqq \max\limits_{1\leqq i,j\leqq n}\left(\mathrm{Re}\left(\dfrac{\sigma_j}{\rho_j} - \dfrac{\sigma_i}{\rho_i}\right) + 2\right) & \text{且つ} \\ \Omega:\ |U_d(x)|\ \left|\left(1+\dfrac{1}{x_1}\right)^{-\sum_2^n \mu_j x_j - (A_1^{(0)})^{-1}A_1^{(1)}}\right| < M \end{cases}$$

(M const)　の下に一様絶対収束する。

(G.D. Birkhoff [7] p482 Th I)　但しここで

$A_1^{(0)}$ は対角形として その対角成分

(2,9) $$\begin{cases} A_1^{(0)} = \mathrm{Diag}[\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n] \\ A_1^{(1)} = \mathrm{Diag}[\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n] \end{cases}$$

且つ　$|\ell_1| > |\ell_2| > \cdots > |\ell_n| > 0$　とする. 同じく $GL(n,\mathbb{C})$~~なて~~一値 さらに $GL(n,\mathbb{C})$一値としても成立しよう.

さて 関係 (2,4) によって $y_1 \to \infty$ としたとき 対応する x がいつも Ω に属しているならば (2,6), (2,7), (2,8) から $\Phi_{\angle_1}(x)$ は

(2,10) $$\Phi_{\angle_1}(x) \sim \left\{ 1 + \frac{S^{(1)}(x')}{x_1} + \cdots + \frac{S^{(d)}(x')}{x_1^d} \right\} \cdot$$

$$\cdot (A_1^{(0)})^{\sum \eta_{1j} y_j} \cdots (A_n^{(0)})^{\sum \eta_{nj} y_j} \cdot \left(\sum_1^n \eta_{1j} y_j \right)^{\sum_1^n \sum_1^n \mu_k \eta_{kj} y_j} \cdot$$

$$\cdot (\text{有界函数})$$

である. この中で ~~により~~

(2,11) $$\left(\sum_1^n \eta_{1j} y_j \right)^{\sum_1^n \sum_1^n \mu_k \eta_{kj} y_j} \sim y_1^{\sum_1^n \sum_1^n \mu_k \eta_{kj} y_j} \cdot$$

$$\cdot \left(\eta_{11} + \sum_2^n \eta_{1j} \frac{y_j}{y_1} \right)^{\sum_1^n \sum_1^n \mu_k \eta_{kj} y_j}, \quad (y_1 \to \infty)$$

である. 一方 (2,6) より $A_i^*(y)$ の y_1 についての次数 $\mu_1^*, \mu_2^*, \cdots, \mu_n^*$ は もし $\angle_1, \angle_2$ 方向が一般ならば

(2,13) $$\mu_i^* = \sum_{j=1}^n \mu_j \eta_{ji}$$

故に (2,10) と (2,3) との比較により $\Phi_{L_1}\Phi_{L_2}^{-1}$ は $x\in\Omega$, $\sigma(x)=y$ 且 $y_1\to\infty$ のとき高々 exponential の程度に増大するのみである。

今

$$(2,14)\qquad \Phi_{L_1} = P_{L_1L_2}(x)\,\Phi_{L_2}$$

と置けば $P_{L_1L_2}(x)$ は周期的で且つ exponential の程度の増大度であるから $P_{L_1L_2}(x)$ は $e^{2\pi\sqrt{-1}x_1},\dots,e^{2\pi\sqrt{-1}x_n}$ の有理式である。

<u>定理Ⅱ.</u> 遷移行列 $P_{L_1L_2}(x)$ は x が $x_1\to\infty$ ~~又は~~ $y_1\to\infty$ のとき Ω に属し且つ ~~両方向~~ が一般の方向ならば $e^{2\pi\sqrt{-1}x_1},\dots,e^{2\pi\sqrt{-1}x_n}$ の有理式になる。

我々の問題はこの $P_{L_1L_2}(x)$ がどういう風に決定されるかである。

<u>問題Ⅲ.</u> $P_{L_1L_2}(x)$ を決定すること。

§3. 例

<u>1)</u> $m=1$ の場合は $H^1(\mathbb{Z}^n, GL(1;\mathbb{C}(x)))$ の構造は佐藤幹夫氏によって完全に決定されており又遷移問題も「Γ函数の Gauß の恒等式」から完全に解かれる。すなわち $\Phi(x)$ は

exponential 有理式の因子を除いて次の形のものに限られる：

$$(3,1)\qquad \Phi(x) = \prod_{\varkappa=1}^{l} \Gamma\Big(\sum_{1}^{n} m_j^{(\varkappa)} x_j + \alpha^{(\varkappa)}\Big)$$

ここに $m_j^{(\varkappa)} \in \mathbb{Z}$, $\alpha^{(\varkappa)} \in \mathbb{C}$. 今 $m_1^{(\varkappa)}$ がすべて正とすれば $\Phi(x)$ は $x_1 = \infty$ の方向に無限乗積を持つ（すなわち仮定 I がみたされる）：

$$(3,2)\qquad \Phi(x) = \prod_{\varkappa=1}^{l} \prod_{\nu=1}^{\infty} A_1(x-e_1) \cdots A_1(x-\nu e_1) \cdot \Big(\sum_1^n m_j^{(\varkappa)} x_j + \alpha^{(\varkappa)} - m_1^{(\varkappa)}\nu\Big)^{\sum_1^n m_j^{(\varkappa)} x_j + \alpha^{(\varkappa)} - m_1^{(\varkappa)}\nu - \frac{1}{2}} \cdot e^{-\left(\sum_1^n m_j^{(\varkappa)} x_j + \alpha^{(\varkappa)} - m_1^{(\varkappa)}\nu\right)} \sqrt{2\pi}\,,$$

ここで $A_1(x) = \prod_{\nu=0}^{m_1^{(\varkappa)}} \Big(\sum_1^n m_j^{(\varkappa)} x_j + \alpha^{(\varkappa)} + \nu\Big)$. これらの結果は $\Gamma(x)$ の無限積展開を使うのみででてくる. 次に $m_1^{(\varkappa)}$ のうちに負のものがあるときは Γ-函数についての Gauß の公式

$$(3,3)\qquad \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

を使えば

$$(3,4)\qquad \Phi(x) = P(x) \cdot \prod_{\varkappa=1}^{l_1} \Gamma\Big(\sum_1^n m_j^{(\varkappa)} x_j + \alpha^{(\varkappa)}\Big) \cdot \prod_{l_1+1}^{l} \Gamma\Big(1 - \alpha^{(\varkappa)} - \sum_1^n m_j^{(\varkappa)} x_j\Big)^{-1}$$

但し $m_1^{(1)}>0, \cdots, m_1^{(l_1)}>0$, $m_1^{(l_1+1)}<0, \cdots, m_1^{(l)}<0$

とする. $P(x)$ は $\sin$ を使って簡単に書ける.

この例では本質的に異なる方向は 2^l 箇存在しそれらは $x\in\mathbb{R}^n$ にかぎると各 ν について

$$\sum_1^n m_j^{(\nu)}x_j+\alpha^{(\nu)}>0 \quad \text{又は} \quad \sum_1^n m_j^{(\nu)}x_j+\alpha^{(\nu)}<0 \tag{3.5}$$

に依って決まる.

<u>例 2</u>. Mellin—佐藤の超幾何函数

例 1. によって定義される函数を $\tilde{\varphi}(s)$　$s\in\mathbb{C}^n$ とするときこの逆 Mellin 変換

$$\varphi(x)=\int \tilde{\varphi}(s)\, x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n}\,ds_1\cdots ds_n \tag{3.6}$$

は Mellin—佐藤の超幾何函数と呼ばれる.

$\varphi(x)$ をパラメーター $\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(l)}$ の函数とみると $\mathbb{C}^l$ 上一価有理型である. 今作用素

$$X_j\varphi(x;\alpha)=\varphi(x;\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(j)}+1,\cdots,\alpha^{(l)})-\alpha^{(j)}\varphi(x;\alpha) \tag{3.7}$$

と $(l-n)$ 箇の 1 次独立な線型関係

$$\sum_{j=1}^{l}\lambda_j^{(h)}\cdot m_k^{(j)}=0 \qquad (1\leqslant h\leqslant l-n,\ 1\leqslant k\leqslant n) \tag{3.8}$$

を決めておけば 函数 φ は 線型差分系

$$
(3,9)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(h)} X_j \varphi = 0 \qquad (1 \leqq h \leqq l-n), \\[2ex]
x_1^{-t_1} \cdots x_n^{-t_n} \varphi = \\[1ex]
\displaystyle = \prod_{j=1}^{l} (X_j + \alpha_j) \cdots \Big(X_j + \alpha_j + \big(\sum_{1}^{n} m_k^{(j)} t_k\big) - 1\Big) \varphi,
\end{cases}
$$

$(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, を満たす. これは最大過剰決定系である.

<u>問題 III</u>. (3,9) によって決まる差分系について定理 I 及び ~~系~~ が成立するか？ 又その時の遷移行列は？

<u>例 4.</u> Pochhammer 函数

例 3. の特別な場合として次の積分表示を考える：

$$
(3,10) \quad \varphi(x;\lambda) = \int (x-\alpha_1)^{\lambda_1} (x-\alpha_2)^{\lambda_2} \cdots (x-\alpha_m)^{\lambda_m} dx .
$$

この場合 積分は 超コホモロジー として考える.

すると

$$
(3,11) \quad \varphi_j(x; \lambda_1, \cdots, \lambda_j, \cdots, \lambda_m) = \int \frac{\prod_{1}^{m} (x-\alpha_j)^{\lambda_j}}{x-\alpha_j} dx
$$

とおくと

$$
(3,12)\left\{
\begin{aligned}
&\sum_{1}^{n} \lambda_j \varphi_j = 0 ,\\
&\bigl(\varphi_1(\lambda_1,\cdots,\lambda_i-1,\cdots,\lambda_m),\ \cdots\cdots,\ \varphi_m(\lambda_1,\cdots,\lambda_i-1,\cdots,\lambda_m)\bigr)=
\end{aligned}
\right.
$$

$$
=(\varphi_1(\lambda),\varphi_2(\lambda),\cdots,\varphi_m(\lambda))\ \times
$$

$$
\times\begin{pmatrix}
-\frac{1}{\alpha_i-\alpha_1} & 0\cdots & 0 & \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_i)(\alpha_1-\alpha_i)} & 0 & \cdots & 0\\
0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\vdots & & -\frac{1}{\alpha_i-\alpha_{i-1}} & \frac{\lambda_{i-1}}{(1-\lambda_i)(\alpha_{i-1}-\alpha_i)} & \vdots & & \vdots\\
\frac{1}{\alpha_i-\alpha_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_i-\alpha_{i-1}}, & \frac{-1}{1-\lambda_i}\sum_{j\neq i}^{m}\frac{\lambda_j}{\alpha_j-\alpha_i}, & \frac{1}{\alpha_i-\alpha_{i+1}}, & \cdots, & \frac{1}{\alpha_i-\alpha_m}\\
0 & \cdots & & \frac{\lambda_{i+1}}{(1-\lambda_i)(\alpha_{i+1}-\alpha_i)}, & -\frac{1}{\alpha_i-\alpha_{i+1}} & & 0\\
\vdots & & & \vdots & & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & & \frac{\lambda_n}{(1-\lambda_i)(\alpha_n-\alpha_i)} & 0 & \cdots & \frac{-1}{\alpha_i-\alpha_n}
\end{pmatrix}
$$

$\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_m$ を基底にとってみると (3,12)から得られる (1,1)は 仮定 I を満たす事が証明される。次に $\varphi(\alpha;\lambda)$ の $\lambda=\infty$ における漸近展開を Debye の鞍点法でもとめてみる。そのために $\lambda_j = n_j t + \lambda_j^{(0)}$ $(n_j \in \mathbb{Z})$ とおいて $t \to +\infty$

における漸近展開を求める．α_j はすべて実で $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m$ とする．

$$\varphi(\lambda)=\int\prod_1^m(x-\alpha_j)^{\lambda_j}dx=$$

$$=\int\prod_1^m(x-\alpha_j)^{\lambda_j^{(0)}}\cdot e^{tf(x)}dx$$

但し

$$(3,13)\qquad f(x)=\log_j\prod_1^m(x-\alpha_j)^{n_j}\quad;$$

$\mathrm{Re}\,f(x)$ の危点 a は $df(a)=0$ から求められる．以下 α_j はすべて実で $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m$ とする．

i) すべて $n_j>0$ の場合

$$(3,14)\qquad \frac{df(x)}{dx}=\sum_1^m\frac{n_j}{x-\alpha_j}=0$$

の根はすべて実でそれを $a_1<a_2<\cdots<a_{m-1}$ とすれば

$$(3,15)\qquad \alpha_1<a_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{m-1}<a_{m-1}<\alpha_m\,.$$

各区間 $I_i:\alpha_{i-1}<x<\alpha_i$ で $\mathrm{Re}\,f(x)$ は $x=a_i$ で最大でありそこで $\mathrm{Im}\,f(x)$ は 0 である．

故に $t\to+\infty$ のとき

$$(3,16)\qquad \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i}\prod_1^m(x-\alpha_j)^{\lambda_j}dx\sim\prod_1^m(a_i-\alpha_j)^{\lambda_j}\cdot\left\{\frac{\pi}{\sum_1^m\frac{n_jt}{(a_i-\alpha_j)^2}}\right\}^{\frac12}$$

但し $Y=\prod_1^m(x-\alpha_j)^{\lambda_j}$ は $x>\alpha_m$ で実数値で上半平面から I_i に解析接続した分岐をとるものとする. このサイクル(相対サイクルであるが $x\to+\infty$ のとき Y は $x=\alpha_{i-1}$ 及び α_i で 0 になるから構わない)を σ_i とおくことにする. 次に

ii) $n_1>0$, $n_2>0$, $\cdots$, $n_r>0$, $n_{r+1}<0$, $\cdots$, $n_m<0$ 且つ $\sum_1^m n_j>0$,

$r\geqq\left[\frac{m}{2}\right]+1$ の場合を考える. i) と同じく簡単のために (3.14) の根はすべて実と仮定する. このとき鞍点 a_i を通る $\operatorname{grad} \operatorname{Re} f(x)$ の力線に沿って積分路 τ_i をとることしかも τ_i 上では $\operatorname{Re} f(x)$ が a_i で最大値をとるように τ_i を選ぶことが出来る. τ_i 上では $\operatorname{Im} f(x)$ は一定であるから Delye の鞍点法が利用出来る. 今自然数の列 $p_1, p_2, \cdots, p_{m-r}$ を p_j が $\sum_{j=p_j+1}^m n_j<-(j-1)$ を満たす最小のものと選ぶ. すると

(3.17) $1\leqslant p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_{m-r}\leqq r$

且つ　　　　　サイクルとして

$$
(3.18)\quad
\begin{cases}
\tau_1 \sim \sigma_1 ,\ \tau_2 \sim \sigma_2 ,\ \cdots ,\ \tau_{r-1} \sim \sigma_{r-1} \\
\tau_j \sim (e^{-2\pi\sqrt{-1}\lambda_{j+1}} - 1)\sigma_j + (e^{-2\pi\sqrt{-1}(\lambda_{j+1}+\lambda_j)} - 1)\sigma_{j-1} + \cdots \\
\cdots + (e^{-2\pi\sqrt{-1}(\lambda_{j+1}+\cdots+\lambda_{p_{m-j}+1})} - 1)\sigma_{p_{m-j}} ,
\end{cases}
$$

$(r+1 \leqslant j \leqslant m-1)$

そして　積分

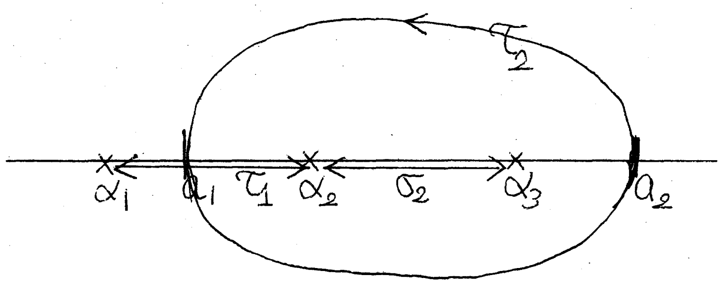
$$
(3.19)\qquad \varphi_k^*(\lambda) = \int_{\tau_k} \prod (x-\alpha_j)^{\lambda_j} dx
$$

の漸近展開は

$$
(3.20)\qquad \varphi_k^* \sim \prod_1^m |a_k - \alpha_j|^{\lambda_j} \left\{ \frac{\pi}{t \sum_1^m \frac{n_j}{(a_k-\alpha_j)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}
$$

$(1 \leqslant k \leqslant m-1)$ で与えられ　2つの方向 i) と ii) 間の遷移行列 $P_{L_1L_2}$ は (3.18) で与えられる. このように $P_{L_1L_2}$ を求めることが純粋に位相幾何の問題に還元される. 最後に $n_1=2$, $n_2=1$, $n_3=-1$ の場合のサイクル τ_1, τ_2 の大体の図を示す.

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} - \frac{1}{x-\alpha_3}$$



$$(3,21)\qquad \begin{cases} \sigma_1 = \tau_1 \\ \tau_2 = (e^{-2\pi\sqrt{-1}\lambda_2}-1)\sigma_2 + (e^{-2\pi\sqrt{-1}(\lambda_2+\lambda_1)}-1)\sigma_1 \end{cases}$$

§4. おしゃべり

近年線型偏微分方程式は佐藤・河合・柏原氏等によって著しい発展がみられ、非可換 module としての代数解析的構造が明らかにされつつある[3] [5] 等. この S.K.K. 理論の中で最大過剰決定系となる場合が多変数函数の立場からは特に興味深く, 上記の考察にもかかわりがある. 代数幾何では最大過剰決定系のことを Gauß-Mannin connection と呼びそのコホモロジーの研究が P. Deligne, Katz, Griffiths 等によって行われている. 上記の初等積分などはこれらの言葉を使って表わされる.

我々の図式は次のようなものである.

線型偏微分方程式

$\Downarrow$ S.K.K.　　　$\Nwarrow$ 超コホモロジー

線型差分方程式　$\Longleftarrow$　初等函数積分

$\Downarrow$ G.D.Birkhoff　　超コホモロジー

無限積

さらに佐藤幹夫氏による ϑー函数のみたす擬微分方程式系や方程式 (1,1) のかわりに $(\mathbb{C}^*)^n$ 上で (1,1) の類以の方程式

$$\Phi\Big(\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{(\nu)} x_j\Big) = A_\nu(x, q)\,\Phi(x) \qquad (1 \leq \nu \leq n)$$

を考えることによって得られる函数はどんなものかも興味深い題材と思われる.

文献

[1] 青本；多価函数積分における松島、村上型定理，数理研報告162，'72.

[2] ――：多価函数積分における漸化公式と連分展開の一般化，数理研報告168，'72.

[3] 柏原：微分方程式の局所理論

数学振興会セミナー, '70.

[4] 佐藤 : 概均質空間の特異軌道と超幾何函数 (東大講義録 '70).

[5] S.K.K. : 擬微分作用素の局所理論 (Springer Lec. Notes, to appear).

[6] P. Deligne : Equations différentielles à Points Réguliers Singuliers (Spinger Lec. Notes, 163)

[7] G.D. Birkhoff : Difference equations Oeuvres Completes I ;

[8] Watson : Theory of Bessel functions.

1973年4月5日

訂正お願い

京都大学数理解析研究所講究録 175「解析的常微分方程式の大域的研究」論文中の41頁10行目を下記のように訂正したい旨，著者より依頼がありましたので，御訂正お願いいたします．

京都大学数理解析研究所

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{(\nu)} x_j\right) = A_\nu(x, q)\,\Phi(x) \qquad (1 \leq \nu \leq n)$$

$$\longrightarrow \quad \Phi(q_{i1} x_1, \cdots, q_{in} x_n) = A_i(x, q)\,\Phi(x) \quad (1 \leq i \leq n)$$