

超幾何微分方程式の群について

大々保謙 = 郎

§1 記号と仮定

$n$  連立線型一階常微分方程式系

$$(t-B) \frac{dx}{dt} = Ax$$

を考へる。  $A, B$  は共に  $n \times n$  定数行列,  $x$  は  $n$  ベクトル。  $B$  は  $(n, n)$  要素以外は全部零,  $(n, n)$  要素は 1。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{n-1, n-1} & a_{n-1, n} \\ a_{n1}, a_{n2} & \dots & \dots & a_{n, n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} a_{j,n} = 1, \quad a_{kk} = a_k \\ \text{と 同 答 する。} \end{array} \right)$$

仮定 1°  $a_j \not\equiv 0 \pmod{1}$

2°  $a_j - a_k \not\equiv 0 \pmod{1} \quad j \neq k$

3°  $a_j: \text{real}$ ,

4°  $\det(\rho_j - A) = 0 \quad \rho_1, \dots, \rho_n: \text{real}$

$\rho_j - \rho_k \not\equiv 0$

5°  $\rho_j - a_k \not\equiv 0$

## §2. 主要定理

定理1.  $\sum p_j = \sum \alpha_k$  (Fuchs の関係式)

定理2. 
$$x_k(t) = t^{\alpha_k} \sum_{m=0}^{\infty} g_k(m) t^m, \quad g_k(0) = \overbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}^k$$
  
( $k=1, 2, \dots, n-1$ )

$$x_n(t) = (t-1)^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) (t-1)^m, \quad g_n(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

は一次独立な解で,  $D \ni \{ |t| < 1 \} \cap \{ |t-1| < 1 \}$  のコ = ハグトな連結部分集合とすると

$$\det(x^1, \dots, x^n)(t) = \frac{\prod_k P(\alpha_k + 1)}{\prod_j P(\rho_j + 1)} t^{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j} (t-1)^{\alpha_n} \quad (t \in D)$$

定理3.  $X(t) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  と基本解とすると,  $X$  は開す  $t=0$  にあける circuit matrix  $M_0$ ,  $t=1$  にあける  $M_1$  とすると,  $c_1', c_1'', \dots, c_{n-1}', c_1'', \dots, c_{n-1}''$  と適当な定数とすると

$$M_0 = \begin{pmatrix} e_1, 0, \dots & 0 & c_1'(e_1-1) \\ 0 & e_2 & \dots & 0 & c_2'(e_2-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e_{n-1} & c_{n-1}'(e_{n-1}-1) \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1''(e_{n-1}) & c_2''(e_{n-1}) & \dots & \dots & e_n \end{pmatrix}$$

とある。

定理 4.  $X(k)$  に適当な対角形定数行列  $\varepsilon$  の付基本解とすると

$$c_j' = 1$$

$$c_j'' = \gamma_j = - \frac{\prod_k \sin \pi (p_k - p_j)}{\sin \pi a_n \cdot \sin \pi a_j \cdot \prod_{k \neq j, n} \sin \pi (a_k - a_j)}$$

とすれば  $M_0, M_1$  は MONODROMY 群の生成元である。

系.  $\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j = 1 - \prod_k \left( \frac{\sin \pi p_k}{\sin \pi a_k} \right)$

注意,  $a_k, p_j$  が real とすれば  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  も real である。

定理 5.  $\varepsilon$  は  $n \times n$  行列  $T$  と

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & & & -1 \\ -1 & \alpha_2 & & & -1 \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-1} & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left( \alpha_k = \frac{1 + \sum \gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right)$$

とすると  $T = M_j T M_j^*$  ( $j=0, 1$ )。ただし  $T$  は定数倍を除いて一意に定まる。

定理 6. MONODROMY 群が有限である条件

$$(1) \quad n \leq 2, \quad (2) \quad \alpha_k + 1 - n \geq 0$$

§3. 定理2の証明.

新しいパラメータ  $\mu$  を導入 (2) のかわりに

$$(2) \quad (t-B) \frac{dx}{dt} = (A+\mu)x$$

特異性  $t^{a_k+\mu}$  を持つ解  $x^k(t, \mu)$  を

$$x^k(t, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} g_k(m, \mu) t^{a_k+\mu+m}$$

によって定義する。但し、 $g_k(0, \mu) = g_k(0)$  とおく。(2) の解の指数  $a_k+\mu$  に対応する解は只一つしかない。

$$(t-B) \frac{dx^k(t, \mu)}{dt} = (A+\mu)x^k(t, \mu)$$

を微分して

$$(3) \quad (t-B) \frac{d}{dt} [x^k(t, \mu)] = (A+\mu-1) [x^k(t, \mu)]$$

を得るから、 $x^k(t, \mu) = (a_k+\mu)x^k(t, \mu-1)$  である。また、この基本解系  $X(t, \mu)$  に応用すると

$$\begin{aligned} (t-B) X'(t, \mu) &= (t-B) X(t, \mu-1) \begin{pmatrix} a_1+\mu & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m+\mu \end{pmatrix} \\ &= (A+\mu) X(t, \mu) \end{aligned}$$

$w(t, \mu)$  を  $w(t, \mu) = \det X(t, \mu)$  とすれば

$$w(t, \mu-1) t^{n-1} \prod_k (a_k + \mu) = \prod_j (p_j + \mu) \cdot w(t, \mu)$$

$$(4) \quad w(t, \mu) = t^{n-1} (t-1) \cdot \prod_j \frac{\Gamma(p_j + \mu)}{\Gamma(p_j + \mu + 1)} \prod_k \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + \mu)} w(t, \mu-1)$$

$$= t^{\mu(n-1)} (t-1)^\mu \cdot \prod_j \frac{\Gamma(p_j + 1)}{\Gamma(p_j + \mu + 1)} \cdot \prod_k \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + 1)} w(t, 0)$$

一方  $x^k(t, \mu)$  の係数  $g^k(m, \mu)$  について詳しく調べると

$$(a_k + \mu + m) g^k(m, \mu) - B(a_k + \mu + m + 1) g^k(m+1, \mu) = (A + \mu) g^k(m, \mu)$$

と (1) 差分方程式の初期条件

$$g^k(0, \mu) = g^k(0)$$

を満足する解であるから

$$g^k(m, \mu) = \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + \mu + m + 1)} h^k(m, \mu)$$

と表すと

$$\begin{cases} (a_k + m - A) h^k(m) = B h^k(m+1) \\ h^k(0) = g^k(0) \end{cases}$$

よって  $h^k(m)$  は  $\mu$  に無関係と表す。

$$x^k(t, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + \mu + m + 1)} h^k(m) t^{a_k + \mu}$$

右辺は  $\mu$  に関する階乗級数で  $\mu$  の変軸に沿って  $\mu \rightarrow \infty$  のとき

$t$  なる compact set  $D$  内にあるば

$$z^k(t, \mu) = \frac{\Gamma(a_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + \mu + \frac{1}{2})} h^k(0) t^{a_k + \mu} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\}$$

$x_n(t, \mu)$  により  $z$  と  $t$  の関数。 (16) 式

$$\begin{aligned} w(t, \mu) &= \det X(t, \mu) = t^{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + (n-1)\mu} (t-1)^{a_n + \mu} \det \{ h^1(0), \dots, h_n(0) \} \\ &\quad \times \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} \\ &= t^{\sum_{k=1}^{n-1} a_k} (t-1)^{a_n} t^{(n-1)\mu} (t-1)^{\mu} \times \left[ 1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right] \end{aligned}$$

(4) とあわせて

$$\begin{aligned} w(t, 0) &= t^{\sum_{k=1}^{n-1} a_k} (t-1)^{a_n} \left( \prod_k \Gamma(a_k + 1) \right) / \left( \prod_j \Gamma(e_j + 1) \right) \\ &\quad \times \prod_k \frac{\Gamma(e_k + \mu + 1)}{\Gamma(a_k + \mu + 1)} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} \\ &= t^{\sum a_k} (t-1)^{a_n} \frac{\prod_k \Gamma(a_k + 1)}{\prod_j \Gamma(e_j + 1)} \frac{\sum p_k - \sum q_j}{\mu} \left( 1 + o\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) \end{aligned}$$

$\mu \rightarrow \infty$  とすれば定理は証明される。

#### §4 定理 3, 4, 5 の証明.

今  $z^k(t)$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) から  $v=1$  に近付くとき

$$z_k^*(t) = c_k' z_n(t)$$

が一辺にありように  $c_k'$  を定めたとき可能である。このとき

$$\tilde{z}_k(t) = z_k(t) - c_k'' z_n(t)$$

とすれば  $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, z_n)$  は独立な基本解系  $\tilde{z}(t)$  とす

る。同様に解 ~~が~~ が  $t=0$  の近くで  $\tau$ -1 になる  $j$  の定数

$$x_n(t) = \sum_{j=1}^{n-1} c_j' x_j(t)$$

$c_1', \dots, c_{n-1}'$  が一意に定まる。  $\tilde{x}_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} c_j' x_j$  とおけば

$$\tilde{X}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \tilde{x}_n)$$

は基本解である。各々変換式

$$\tilde{X} = X \begin{pmatrix} 1 & & & c_1' \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & c_{n-1}' \\ & & & 1 \end{pmatrix} = X C_0$$

$$\tilde{\tilde{X}} = X \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ c_1'' & \dots & c_{n-1}'' & 1 \end{pmatrix} = X C_1$$

を満足し、 $\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}}$  によって  $\tau$  の各  $0, 1$  における circuit matrix

は

$$\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & e_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & e_{n-1} \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & e_n \end{pmatrix}$$

である。これを併用すれば

$$M_0 = C_0 \tilde{M}_0 C_0^{-1}, \quad M_1 = C_1 \tilde{M}_1 C_1^{-1}$$

よって  $X$  に関する circuit matrix は  $M_k$  のみである。実際  $C_k = I + \Sigma_k$

とおけば  $\Sigma_k (k=0,1)$  は中零である。

$$M_0 = (I + \Sigma_0) \tilde{M}_0 (I - \Sigma_0) = \tilde{M}_0 + \Sigma_0 \tilde{M}_0 - \tilde{M}_0 \Sigma_0 - \Sigma_0 \tilde{M}_0 \Sigma_0$$

$$M_1 = (I + \Sigma_1) \tilde{M}_1 (I - \Sigma_1) = \tilde{M}_1 + \Sigma_1 \tilde{M}_1 - \tilde{M}_1 \Sigma_1 - \Sigma_1 \tilde{M}_1 \Sigma_1$$

より簡単に計算される。これは定理3は示された。

新しい基本解系  $X'(t) = X(t)T$  と対角行列

$$T = \text{diag}(c_1', c_2', \dots, c_{n-1}', 1)$$

により変換可能

$$M_0 \rightarrow T^{-1} M_0 T$$

$$M_1 \rightarrow T^{-1} M_1 T$$

となる。今  $c_j' \cdot c_j'' = \gamma_j$  と置けば定理4にいう形になる。

$\gamma_j$  は計算可能には

$$\det(M_0 M_1 - \lambda I) = 0$$

の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  かつ  $t \rightarrow \infty$  にあける指数  $f_k = \exp(-2\pi i p_k)$  の逆であることを用いる。

$$M_0 M_1 = \begin{pmatrix} e_1 + \gamma_1(e_{n-1})(e_1-1) & \gamma_2(e_{n-1})(e_2-1) & \dots & \dots & e_n(e_1-1) \\ (e_2-1)\gamma_1(e_{n-1}) & e_2 + \gamma_2(e_2-1)(e_{n-1}) & \dots & \dots & e_n(e_2-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_{n-1})\gamma_1(e_{n-1}-1) & \dots & \dots & e_{n-1} + \gamma_{n-1}(e_{n-1})(e_{n-1}-1) & e_n(e_{n-1}-1) \\ \gamma_1(e_{n-1}) & \gamma_2(e_{n-1}) & \dots & \gamma_{n-1}(e_{n-1}) & e_n \end{pmatrix}$$

$\det(M_0 M_1 - \lambda I)$  は計算可能には  $n$  列の  $(e_j - 1)$  係数は  $j$  列より



3) " 2 残り と 書くと

$$\begin{vmatrix} e_1 - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e_n - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +\lambda(e_1 - 1) \\ \lambda(e_2 - 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ r_1(e_1 - 1) & r_2(e_2 - 1) & \dots & e_n - \lambda \end{vmatrix}$$

今これを  $n$  列に  $n$  行展開する。

$$\begin{aligned} \det(M_0 M_1 - \lambda I) &= \sum_{j=1}^n \text{sgn} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, j, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n, \dots, j \end{pmatrix} \lambda(e_j - 1) \cdot r_j(e_j - 1) \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (e_k - \lambda)}{e_j - \lambda} + \prod_k (e_k - \lambda) \\ &= \prod_k (e_k - \lambda) \end{aligned}$$

この式から  $\lambda$  にたいして identity であることは用いて  $\lambda = e_j$  における residue を計算する。

$$\varphi(\lambda) = \prod_k (e_k - \lambda) \quad \psi(\lambda) = \prod_j (f_j - \lambda)$$

とすると,

$$-r_j \cdot e_j (e_j - 1) (e_n - 1) \varphi'(e_j) = \psi'(e_j) (e_n - e_j)$$

又  $\lambda = 1$  とおけば

$$1 - \sum r_j = \frac{\psi(1)}{\varphi(1)}$$

より  $r_j$  の式が直接与えらる。定理 5, 6 の形に分けることは不可は  $\exp(\pi i a_k) = e_k', \exp(\pi i b_j) = f_k'$  と用いて書くのが便利である。

$$\begin{aligned}
 \psi(z)/\varphi(z) &= \prod_{k=1}^n (f_k^{1/2} - 1) / \prod (e_k^{1/2} - 1) \\
 &= \frac{(f_1 \cdots f_n) \cdot \prod (f_k - f_k^{-1})}{(e_1 \cdots e_n) \prod (e_k - e_k^{-1})} \\
 &= \prod_{k=1}^n \left( \frac{\rho \sin \pi \rho_k}{\sin \pi a_k} \right) \quad \begin{aligned} (f_1 \cdots f_n) &= \exp(\pi i \sum \rho_j) \\ (e_1 \cdots e_n) &= \exp(\pi i \sum a_k) \end{aligned}
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 \gamma_j &= - \frac{(f_1^2 - e_j^2)(f_2^2 - e_j^2) \cdots (f_n^2 - e_j^2)}{e_j^2 \cdot (e_j^2 - 1) \underbrace{(e_1^2 - e_j^2)(e_2^2 - e_j^2) \cdots (e_{n-1}^2 - e_j^2)}_{n-2} (e_n^2 - 1)} \\
 &= - \frac{(f_1 e_j^{-1} - \frac{1}{f_1 e_j^{-1}}) \cdots (f_n e_j^{-1} - \frac{1}{f_n e_j^{-1}}) \cdot f_1 \cdots f_n \cdot e_j^n}{e_j^3 (e_j - \frac{1}{e_j}) \cdot \underbrace{e_1 \cdots e_{n-1}}_j \cdot e_j^{n-2} (e_1 e_j^{-1} - \frac{1}{e_1 e_j^{-1}}) \cdots (e_{n-1} e_1^{-1} - \frac{1}{e_{n-1} e_1^{-1}}) e_n (e_n - \frac{1}{e_n})} \\
 &= - \frac{\sin \pi(\rho_1 - a_j) \sin \pi(\rho_2 - a_j) \cdots \sin \pi(\rho_n - a_j)}{\sin \pi a_j \sin \pi a_n \sin \pi(a_1 - a_j) \cdots \sin \pi(a_{n-1} - a_j)}
 \end{aligned}$$

これにより  $\gamma_j, 1 - \sum \gamma_j$  ... 全部実数であることが証明された。

§5 定理5,6 の証明.

まず,  $GL(n, \mathbb{C})$  の部分群  $G = \{g\}$  が有限群であるとき

$$\sum_{g \in G} \langle ug, ug \rangle = [u, u] = u^T u^*$$

は正定値行列 = 対角行列となり  $n \rightarrow ug$  ... の変換に対して

$$u^T u^* \rightarrow u^T g^* u^* = u^T a^*$$

2° ありから  $T$  は  $g^T g^* = T$  とある正定値対称行列である。

ゆえに  $T$  の固有値は正であるから  $T$  の逆行列  $M_0, M_1$  は  $T$  の逆行列と見なせる。

また  $M_0 T M_0^* = T$  とある条件を考慮すると  $T = (r_{j,k})$  ( $r_{j,k} = r_{k,j}$ )

として

$$T M_0^* = \begin{pmatrix} r_{11} & & & r_{1n} \\ & & & \\ & & & \\ r_{n1} & & & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^* & 0 & & 0 \\ 0 & e_2^* & & 0 \\ & & & \\ e_1^*-1 & e_2^*-1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} e_1^* + r_{1n} (e_1^*-1) & & & r_{1n} \\ & & & \\ & & r_{jk} e_k^* + r_{jn} (e_k^*-1) & r_{jn} \\ r_{n1} e_1^* + r_{nn} (e_1^*-1) & & r_{nk} e_k^* + r_{nn} (e_k^*-1) & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$M_0 T M_0^*$  の対角成分を計算する。これは上の行列の対角成分と同

であるから

$$\begin{cases} r_{nk} e_k^* + r_{nn} (e_k^*-1) = r_{nk}, & (k=1, 2, \dots, n-1) \\ r_{nn} = r_{nn} \end{cases}$$

故に  $r_{n,k} = -r_{nn}$  である。

次に  $M_0 T M_0^*$  の第  $j$  列を計算する。ベクトル

$$(0, 0, \dots, e_j, \dots, (e_j - 1))$$

と第  $k$  行にかけると

$$e_j [r_{jk} e_k^* + r_{j,n} (e_k^* - 1)] + (e_j - 1) [r_{nk} e_k^* + r_{nn} (e_k^* - 1)] = r_{jk}$$

とすると  $\bar{r}_{n,j} = \bar{r}_{j,n} = -r_{nn}$  と右辺の定数項が

$$(e_j e_k^* - 1) r_{jk} - r_{nn} \{ e_j (e_k^* - 1) + (e_j - 1) \} = 0$$

$$e_j e_k^* = 1 \text{ ならば } r_{j,j} = \text{定数項} = \text{成立}$$

$$e_j e_k^* \neq 1 \text{ ならば } r_{j,k} = -r_{nn}$$

今簡単のため  $r_{nn} = 1$ ,  $r_{j,j} = \alpha_j$  とおけば

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & & & -1 \\ -1 & \alpha_2 & & & -1 \\ & & & & \\ -1 & -1 & & & \alpha_{n-1} - 1 \\ -1 & -1 & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha_j: \text{任意})$$

は  $M_0$  に関して不変である。

$M_1 T$  の第  $k$  列より第  $(n-1)$  列までが

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ * & * & & & * & * \end{pmatrix}$$

の形より  $T$  の対応する列と同一の第  $n$  列の要素は

$$-\sum_{j \neq k} r_{j,k} (e_n - 1) + \alpha_k r_k (e_n - 1) - e_n \quad (k \leq n-1)$$

$(n, n)$  要素は

$$-\sum r_j (e_n - 1) + e_n$$

である。

$M_1^T M_1^*$  の  $j$  列は  $j \leq n-1$  のとき  $(j, n)$  要素を除いて

$$M_1^* = \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

の形であり  $M_1^T$  の  $j$  列と同じである。  $j = n$  列は

$$\left( -\sum_{j \neq 1} r_j (e_n - 1) + \alpha_1 r_1 (e_n - 1) - e_n, -\sum_{j \neq 2} r_j (e_n - 1) + \alpha_2 r_2 (e_n - 1) - e_n, \dots, * \right)$$

$(n, k)$  要素は  $-1$  と  $\alpha_k < 1$  と

$$-\sum_{j \neq k} r_j (e_n - 1) + \alpha_k r_k (e_n - 1) - (e_n - 1) = 0$$

$$-\sum r_j + (\alpha_k + 1) r_k - 1 = 0$$

$$\alpha_k = \frac{1 + \sum r_j}{r_k} - 1 \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

これを利用して  $M_1^T$  の  $(j, n)$  要素  $-\sum r_j (e_n - 1) + e_n$  より  $M_1^T M_1^*$  の

$(j, n)$  要素を計算する。  $\alpha_j r_j (e_n^* - 1) - \sum_{k \neq j} r_k (e_n^* - 1) - e_n^*$

$\alpha_k$  が real であるから  $\alpha_k = 1$  の場合は  $-1$  である。最後に  $(n, n)$  要素は

$$(-1, -1, \dots, -1, e_n - \sum r_j (e_n - 1))$$

$(r_1 (e_n^* - 1), r_2 (e_n^* - 1), \dots, r_{n-1} (e_n^* - 1), e_n^*)$  に乗ると

$$-\sum r_j (e_n^* - 1) + e_n e_n^* - \sum r_j e_n^* (e_n - 1) = e_n e_n^* = 1$$

$T$  が正定値であるための条件は

$$\begin{aligned} u^T u^* &= \sum_1^{n-1} \alpha_k |u_k|^2 + |u_n|^2 - \sum_{j,k} u_j u_k^* \\ &= \sum_1^{n-1} \{\alpha_k + 1 - n\} |u_k|^2 + (2-n) |u_n|^2 + \sum_{j,k} |u_j - u_k|^2 \end{aligned}$$

が正定値である, ならば  $n=2$  の場合のみあり得る。