

制限三体問題について

東大 教員 齊藤 利洋

この講演の目的は制限三体問題の数学的定式化と, G. D. Birkhoff の論文

The Restricted Problem of Three Bodies, Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. 39 (1915), 265-334

のほんの一部とを紹介することである。

§1. 運動方程式

三つの天体 S, J, P が互いに万有引力を引きあひながら運動しているとき, それらの天体の運動を調べると三体内問題であるが, 特に, P の質量が S, J の質量に比べてきわめて小さいと仮定のもとでこの問題をとりあつかうのが, 制限三体問題 (Restricted problem of three bodies) である。

S と J の質量の和を質量の単位にとり, S の質量を μ , J の質量を $1-\mu$, P の質量を m とする. $m \rightarrow 0$ とする極限の場合が制限三体問題である。

このとき, S と J の運動には P が及ぼす引力の影響を与えないから, S と J の運動は二体内問題として決定される。し

たが、 τ 、それはこの時刻に S と J の重心を焦点とする楕円軌道の上を動く。問題を簡単にするために、 S と J の軌道の A と B の場合のみを考える。(エネルギー積分の値を E 、角運動量積分の値を h 、万有引力定数を k とすれば、 $2h^2E + k^2\mu^6 = 0$ のとき、このように状況が実現される。)

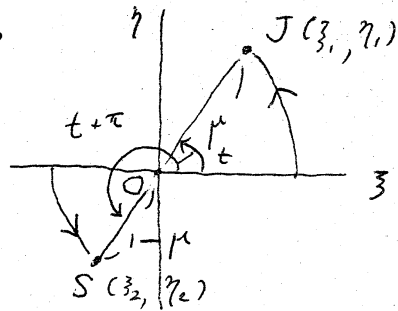
S と J の運動のあこつてゐる平面上に、 S と J の重心を原点とする直交座標系 (ξ, η) を $\frac{k}{\mu}$ に入し、また SJ の距離を長さの単位にとり、 ξ 軸は適当な方向にとれば、時刻 t にあつた J の座標 (ξ_1, η_1) は時間の単位を適当にとれば

$$\xi_1 = \mu \cos t, \quad \eta_1 = \mu \sin t$$

S の座標 (ξ_2, η_2) は

$$\xi_2 = (1-\mu) \cos(t+\pi), \quad \eta_2 = (1-\mu) \sin(t+\pi)$$

で与えられる。この、簡単な計算により確かめられる。ゆゑに S, J 、および座標の原点 (すなわち S, J の重心) O は、常に一直線上にあり、この直線は角速度 1 で回転してゐる。



これを τ の時刻 S, J からの引力の下で P の行方運動は次の運動方程式によつて与えられる。

P の座標は (ξ, η) とし、

$$\overline{PJ} = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} = r_1, \quad \overline{PS} = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2} = r_2$$

とあるは、

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{(1-\mu)(\xi-\xi_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(\xi-\xi_2)}{\rho_2^3},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{(1-\mu)(\eta-\eta_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(\eta-\eta_2)}{\rho_2^3},$$

$$\xi_1 = \mu \cos t, \eta_1 = \mu \sin t, \xi_2 = (1-\mu) \cos(t+\pi), \eta_2 = (1-\mu) \sin(t+\pi)$$

∴ 微分方程式はたゞ explicit に含んでゐる 2 つの力学系として
 のとりあつたものかたゞでない。t は explicit に含まれる方程式に
 直交するものは、0 である、直線 $\xi=0$ は x 軸、それは直交する
 直線は y 軸にたり、 ξ, η 系は角速度 1 で回転する座標
 系 (x, y) である。∴ 座標系に因る運動方程式は

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$U = -\frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2}, \quad \rho_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}$$

(μ は座標系に因る J, S の座標はそれぞれ $(\mu, 0)$,
 $(-1+\mu, 0)$ とあるから $\rho_1 = \overline{PJ}$, $\rho_2 = \overline{SJ}$ は上式で与えられた。))

力学系の取、扱ふに可いものは、 $-1/\mu$ の方程式は $\frac{P}{\mu}$ の通である

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{du}{dt} = x + 2v - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = y - 2u - \frac{\partial U}{\partial y}$$

あるは、(1) の、

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - \dot{x}y) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - U$$

は Lagrangian とする変分問題 $\delta \int L dt = 0$ の Euler 方程式に
 なることを注意すれば、(1) の μ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

(3)

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + (y p_x - x p_y) + U, \quad (p_x = \dot{x} - y, \quad p_y = \dot{y} + x)$$

のよゝは Hamiltonian form に書くととてできる。

(3) がよい直ちに (1) は H の積分にもよるとわかる。これは

は Jacobi の積分 とする。Jacobi の積分はまた

$$(4) \quad H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U$$

と書くととてできる。

(以上の議論では S, J, P の同一平面上に動くとしておく。制限三体問題の重要な応用、一つである小惑星の運動、それは S の太陽、J の木星、P の小惑星である場合にはこの仮定はほぼ実現されているよゝである。)

§2. 特異点

以後主として微分方程式 (2) について議論する。

(2) の trivial な解、すなわち特異点は

$$u = v = 0, \quad x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

である。ゆゑにこれは xy 平面上で

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{((x-\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu(x+1-\mu)}{((x+1-\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - x &= 0, \\ \frac{(1-\mu)y}{((x-\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu y}{((x+1-\mu)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - y &= 0, \end{aligned}$$

を満足する点がある。(5)から直す:

$$y=0, \quad \text{または} \quad \frac{1-\mu}{((x-\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{((x+1-\mu)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 = 0$$

を得る。 $y=0$ の時は

$$\frac{(1-\mu)(x-\mu)}{|x-\mu|^3} + \frac{\mu(x+1-\mu)}{|x+1-\mu|^3} - x = 0$$

で、これは満たす x の値は、 $(-\infty, -(1+\mu))$, $(-(1+\mu), \mu)$, (μ, ∞) にそれぞれ一つずつ存在することから容易にわかる。これはそれぞれ x_1, x_2, x_3 とするから、特異点は $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$ である。

$y \neq 0$ の場合は、上二式を下式で単純な変形により、

$$(x-\mu)^2 + y^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2 = 1$$

を得る。特異点は SJ の一辺と重なる、正三角形の頂点

$$P_1: \left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_2: \left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

にあることがわかる。これは、特異点は Lagrangeの平衡点 である。

これらの点 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$ が不安定であることは直ぐにわかる。 P_1, P_2 については、

$$\mu(1-\mu) > \frac{1}{27}$$

のとき不安定になることが直ぐにわかる。

$$\mu(1-\mu) \leq \frac{1}{27}$$

のときは、微分方程式の右辺を P_1, P_2 の近傍の Taylor 展開
 したときの 1 次項の係数のつくる行列の固有値がすべて純
 虚数になるので、安定性は直ちにわがらな。しかし、 μ
 の例外的な値を除くか、実は P_1, P_2 は安定な（しか
 も両側に安定な）特異点であることが証明されているよう
 である。（C.L. Siegel & J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Springer,
 1971）

§3. 積分曲面の分類

$$F = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U$$

と $\frac{P}{Q}$ ならば、Jacobi の積分 (4) は

$$(6) \quad H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + F$$

と $\frac{P}{Q}$ ならば、 $H = E$ (E : 定数) としてえらる積分曲面のどの
 ようなものがと調べるために、(6) を使って $H = E$ と

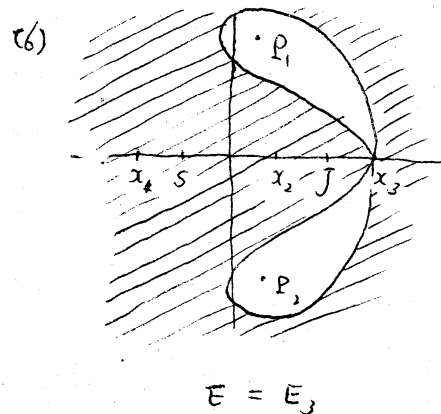
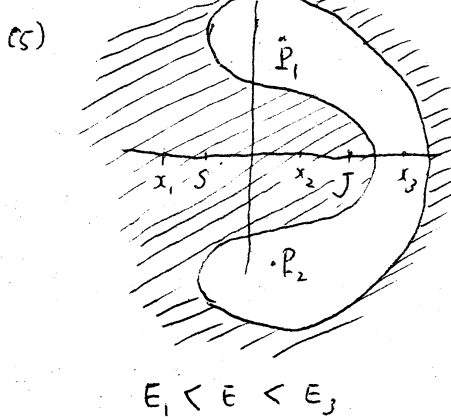
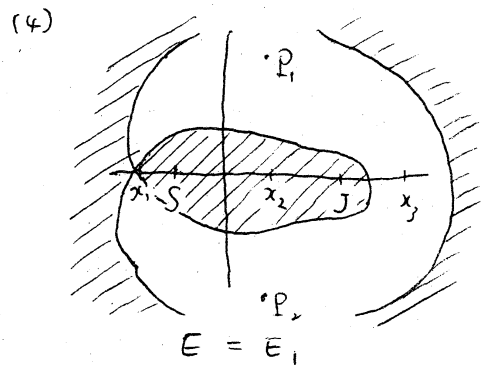
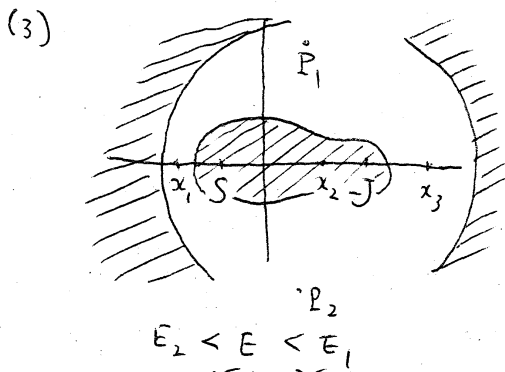
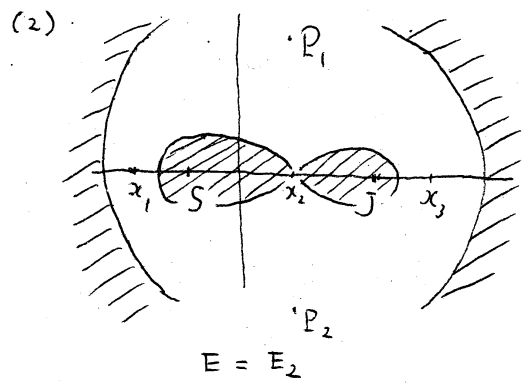
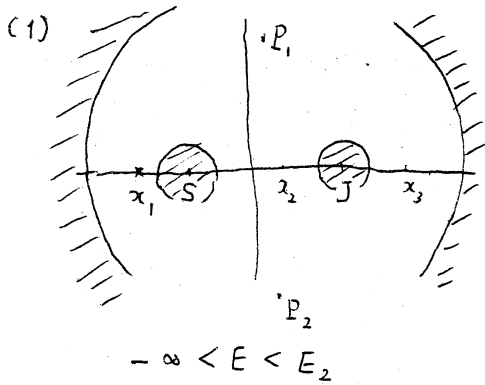
$$(7) \quad F = -\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + E$$

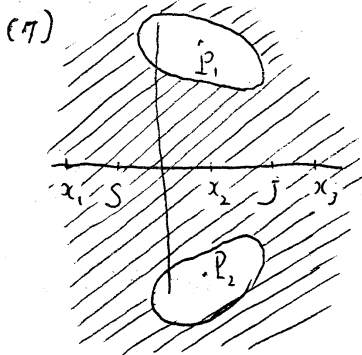
と書き直す。(7) から直ちに $F \leq E$ であり、 $H = E$ の上の点の、
 xy 平面への射影は、領域 $F \leq E$ の中にある。したがって、
 積分曲面 $H = E$ の上にある orbit の xy 平面への射影
 は領域 $F \leq E$ に属する。この領域の境界 $F = E$ は、 $H = E$ と
 xy 平面との交線であり、零速度曲線 とよばれる。 E の異なる
 値に対して $F \leq E$ を調べよう。

$$E_1 = F(x_1, 0), E_2 = F(x_2, 0), E_3 = F(x_3, 0),$$

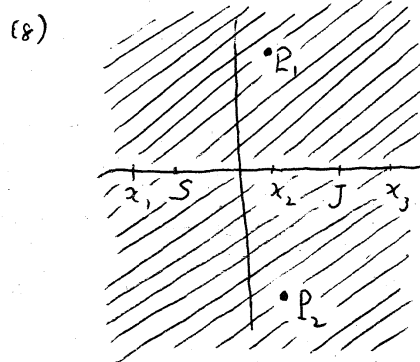
$$E_4 = F\left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = F\left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

と $\mu < \frac{1}{2}$, $E_2 < E_1, E_3 < E_4$ であり, E_1 と E_3 の大小は μ の値に關係する。と $\mu > \frac{1}{2}$ である。従って $E_1 < E_3$ であるとき, $F \leq E$ の形は図の斜線部分を表わす。





$$E_3 < E < E_4$$



$$E = E_4$$

今までの比較的 $< \text{し} < \text{調}$ の し て う の は (1) の場合でも、 J または S のまわりの oval の内部に運動がない場合がある。

(2), (4), (6), (8) の上には、 $H = E$ の singularity がある場合を除き、また $F \subseteq E$ が有界になる場合を除けば、上記述べている場合と、(3) の、運動の内側の oval の内部にない場合を除く。今後は主としてその場合を調べる。

§ 4 Regularization

(1) および (3) で、 し て $F \subseteq E$ が compact になる場合を除く。その時は $F \subseteq E$ の中に $p_1 = 0$ または $p_2 = 0$ となる所がある。これは u, v が有界になる。この $H = E$ は compact になる。Birkhoff は巧妙な変数変換と reparametrization を行なうと、微分方程式の上記の領域に特異性はない。したがって $H = E$ が compact な manifold になる。

よって $z = x + iy = \xi + i\eta$

$$z = x + iy, \quad w = \xi + i\eta$$

$$(8) \quad \frac{z+1-\mu}{z-\mu} = \left(\frac{w+1-\mu}{w-\mu} \right)^2$$

よって $\tau(x, y)$ から (ξ, η) に変換できる。この変換によつて

$$\tau \quad x = \mu, y = 0; \quad x = -1 + \mu, y = 0 \quad \text{は} \quad z \text{ と } z^{-1} \text{ に} \quad \xi = \mu, \eta = 0; \quad \xi = -1 + \mu, \eta = 0$$

に対応する。

$$R_1 = \sqrt{(\xi - \mu)^2 + \eta^2}, \quad R_2 = \sqrt{(\xi + 1 - \mu)^2 + \eta^2}, \quad R_3 = \sqrt{(\xi + \frac{1}{2} - \mu)^2 + \eta^2}$$

と置き、さらに

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{4R_3^4}{R_1^2 R_2^2}$$

よって τ を ξ の関数として $x - y - \tau$ を定義する。後の調べるよ

に $R_3 = 0$, $\eta = 0$ かつ $\xi = \mu - \frac{1}{2}$, $\eta = 0$ は xy 平面の無限遠点に対応するから、 $F \leq E$ の有界な区間は、その範囲では、

τ は ξ と η に単調に増加するパラメータとして表す。

このとき微分方程式 (2) は

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \xi', \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \eta', \quad \frac{d\xi'}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^4} \eta' + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \quad \frac{d\eta'}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^4} \xi' + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}$$

$$\Omega = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^4} \left[\frac{(1-\mu)R_1^4 + \mu R_2^4}{8R_3^2} + 2R_3 \left(\frac{1-\mu}{R_1^2} + \frac{\mu}{R_2^2} \right) - \frac{\mu(1-\mu)}{2} \right]$$

とあり、この方程式は $R_3 = 0$ 上の特異点を持つ。それ

を Jacobi の積分は

$$H = \frac{2R_3^4}{R_1^2 R_2^2} \left(\xi'^2 + \eta'^2 - \Phi(\xi, \eta) \right),$$

$\Phi(\xi, \eta) = \frac{R_1^2 R_2^2}{16R_3^6} ((1-\mu)R_1^4 + \mu R_2^4) + \frac{1}{R_3^3} ((1-\mu)R_2^2 + \mu R_1^2) - \frac{\mu(1-\mu)R_1^2 R_2^2}{4R_3^4}$
 と書かれ、 $\xi^2 + \eta^2 = \Phi(\xi, \eta)$ の四面 $H = E$ は

$$\xi^2 + \eta^2 = \Phi(\xi, \eta) = \frac{R_1^2 R_2^2}{16R_3^6} ((1-\mu)R_1^4 + \mu R_2^4) + \frac{1}{R_3^3} ((1-\mu)R_2^2 + \mu R_1^2) + (2E - \mu(1-\mu)) \frac{R_1^2 R_2^2}{4R_3^4}$$

と書かれる。この変換は Birkhoff の regularization である。

変換 (8) により、 z の ∞ の値には一般に $w_1 = 0$ の値 w_1, w_2 が対応し、分岐点は $z = \mu, z = -(1+\mu)$ である。

$\text{Im } z \neq 0$ ならば z に対応する w は $\text{Im } w \neq 0$ であり、 $\text{Im } w_1$ と $\text{Im } w_2$ は反対符号になる。したがって、 $\text{Im } z > 0$ のときは、 $\text{Im } w_1 > 0, \text{Im } w_2 < 0$ とするとよい。

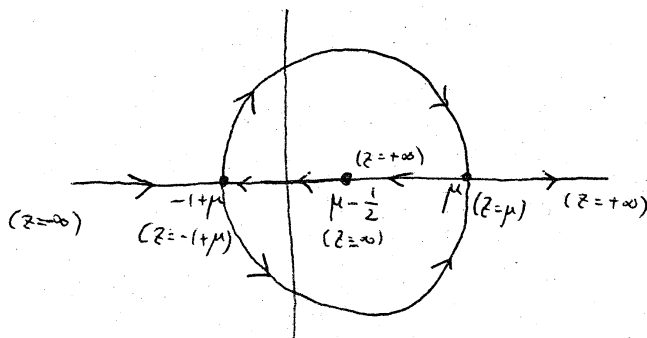
また、(8) は w に関する $z = \infty$ の近傍で Taylor 展開可なり

$$w = \begin{cases} 2z + \frac{1-2\mu}{2} + \dots \\ -\frac{1-2\mu}{2} + \dots \end{cases} \quad (\dots \text{は } \frac{1}{z} \text{ の正のべき級数})$$

と仮定すれば、 $z = \infty$ は、 w 平面では ∞ と、 $-\frac{1-2\mu}{2} = \mu - \frac{1}{2}$ とに対応する。

z の実軸上 $-\infty$ から $+\infty$ まで z が動くとき、 w の変化は図のようになる。

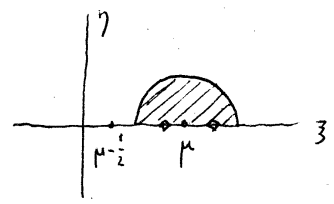
以上のことから、 $\text{Im } z = 0$ の場合を除けば、 z 平面と w の上半平面との対応は 1-1 であり、 $\text{Im } z = 0$



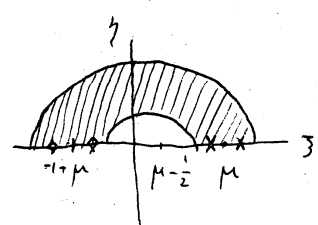
の所にて $-1+\mu \leq z \leq \mu$ の範囲は, それに対応する w の値 E , w の上半平面に一つしか存在しない. したがって $(-\infty, -1+\mu)$ と (μ, ∞) に属する z に対してのみ, w_1, w_2 の値は w 平面の実軸上にあらわれる.

領域 $F \subseteq E$ は, w 平面では $\Psi(z, \eta) \geq 0$ に変わる. したがって領域 $\Psi(z, \eta) \geq 0$ の, $\text{Im } w \geq 0$ に属する部分だけをとると, この領域は $\text{Im } w = 0$ の所を除けば, 領域 $F \subseteq E$ と 1-1 に対応する.

場合 (1) の, J のまわりの oval は, 図のよう, w 平面での, 点 $(\mu, 0)$ のまわりの oval の上半部とほぼ一対一に対応する. したがって $\eta = 0$ の所では二つの w の値が z の一つの値に対応する.



場合 (3) の, S, J を同時に含む oval は右図の斜線区施した部分とほぼ一対一に対応する. したがって $\eta = 0$ の部分だけは一対二に $z = \mu$ は上の場合と同様である.



§5 積分曲面の形の決定

いままでに得られた結果を基にして Birkhoff は ~~積分曲面~~ 積分曲面 $H = E$ がどのような多様体と位相同型であるかを決定

定まる。その方法はきわめて elementary な Little 巧妙である。

まず w の上半平面 $\text{Im } w = \eta \geq 0$ において考える。 $H = E$ は $\xi'^2 + \eta'^2 = \bar{\Psi}(\xi, \eta)$ であり、 $\eta' =$

$$(9) \quad \eta' = \pm \sqrt{\bar{\Psi}(\xi, \eta) - \xi'^2}$$

であるから、 $\bar{\Psi}(\xi, \eta) \geq 0$ であるような (ξ, η) に対して

$$\xi'^2 < \bar{\Psi}(\xi, \eta)$$

となるような ξ' の値は一つ決まると、それに対して (9) によ
り η' の値が二つ決まる。また

$$\xi'^2 = \bar{\Psi}(\xi, \eta)$$

であるような ξ' の値は一つ決まると、それに対して (9) によ
り η' の値がただ一つ、すなわち $\eta' = 0$ が決まる。

そこで次のようにする。

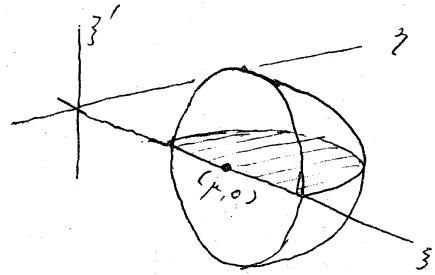
ξ, η 平面の $\eta \geq 0$ の部分に領域 $\bar{\Psi}(\xi, \eta) \geq 0$ があり、その上
の各点 (ξ, η) に対して、線分 $-\sqrt{\bar{\Psi}(\xi, \eta)} \leq \xi' \leq \sqrt{\bar{\Psi}(\xi, \eta)}$ があり、
 $\xi' < \sqrt{\bar{\Psi}(\xi, \eta)}$ である Π とする。 $\Pi = \bigcup_{\bar{\Psi}(\xi, \eta) \geq 0} \{(\xi, \eta) \times \xi' \mid -\sqrt{\bar{\Psi}(\xi, \eta)} \leq \xi' \leq \sqrt{\bar{\Psi}(\xi, \eta)}\}$

このように Π を用いて、一方は $\eta' \geq 0$ に対応する Π_+ と
してそれを Π_+ 、他方は $\eta' \leq 0$ に対応する Π_- としてそれを Π_-
で表わす。 Π_+ , Π_- の表面である $\xi'^2 = \bar{\Psi}(\xi, \eta)$ において $\eta' = 0$
の η' が一致して $\eta = 0$ になるから、 Π_+ と Π_- とは $\eta = 0$ の表面で
はりあわせる。それを Π' とすればこれは $H = E$ と同様な
集合になる。しかし $\eta = 0$ の部分では一組の (x, y) に対 ~~して~~

ξ の値 \rightarrow τ を τ として τ の τ , π' にあつて τ の $\tau = \text{真}$ を identify してやると τ は τ になる. τ の identification によつて種分曲面 $H = E$ が完成する.

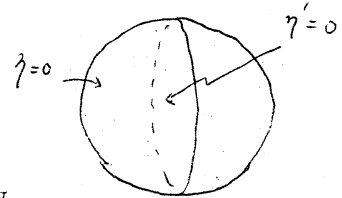
(1) の場合 J は τ が oval として $\tau = \tau$ である. τ である

τ . τ のとき $\Psi(\xi, \eta) \geq 0, \eta \geq 0$ は τ を τ にしめし τ である τ の領域に属する τ , τ の各点に線分 $-\sqrt{\Psi} \leq \xi' \leq \sqrt{\Psi}$ を立てると,



図の τ である半球状の立体ができる. τ は τ の π である. τ として τ の球の表面に属する τ の $\xi' = \Psi(\xi, \eta), \eta$ は τ の $\eta' = 0$ に対応する. $\tau = \tau$, τ の半球 $E = (\pi_+ \cup \pi_-)$ として, 球の表面に属する τ は τ の τ である τ , 球の表面の $\eta = 0$ に対応する. $\tau = \tau$ は, (x, y)

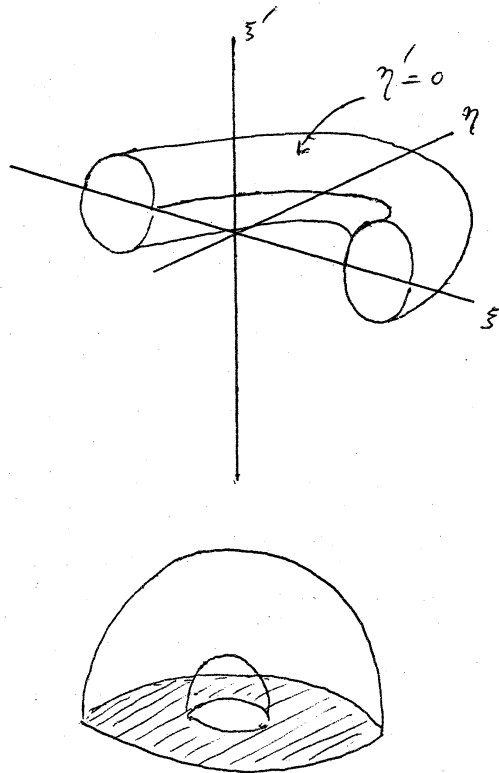
$\rightarrow (\xi, \eta)$ の対応の (分岐点 $x = \mu, y = 0$ を除く) τ である τ を identify して



は τ である τ . $x = \mu, y = 0$ に対しては (ξ, η) は τ の τ である τ , τ の分岐に属する (ξ', η') の τ の $x \rightarrow \mu, y \rightarrow 0$ のとき一致する τ , τ の球面上に τ は τ である τ の τ に対応する. τ は τ , τ $H = E$ は, solid sphere にあつて τ の表面上の τ を identify して τ である τ . τ は deformation を行ふと, τ は antipode を identify する τ である τ .

る。で、 $H = E$ は射影空間 P^3 と同相なことをわかる。

(3) の場合、 $J, S \in \mathcal{C}$ が ∞ oval になると同様考察を
 示す。すなわち、 Π は図のよう
 に solid torus を半分に切っ
 た形になり、torus の表面が
 $\eta' = 0$ に対応するから、こ
 のよりの solid torus を二つ、
 表面に貼、 τ は η を η'
 に対応する。それを見や
 り、solid torus
 を半分に切、左図形を、二
 つの同心半球の内側の領域に
 deform する。このとき、



torus の表面が下の図の斜線部分に対応し、torus の切り口
 τ は二つの半球の内面と外面とに対応
 する。torus を二つに分ける操作は、このよりの同心半球を二
 つに分け、 τ は図の斜線部分でそれと τ は η を η' と対応
 する、したがって同心半球の内側の領域が得られた。 $\eta = 0$ の部分
 τ の identification は、外側の球面、内側の球面それぞれを
 τ antipode を identify したと同等である。

§ 6, その他の結果

Birkhoff は次に, 場合 (1) の, 運動量が J をとり $\neq \text{oval}$ の内部に存在する場合を詳しく調べている. 彼はこれを $\mu=0$ からの perturbation としてあつかった.

Kepler 変数に変数変換し, この変数によって力学系の ring domain の surface of section をとると表示し, 問題を ring domain の twist map に帰着させた. これは本質的には Poincaré の idea である.

この twist map に対して, Poincaré によって予想され, Birkhoff によって証明された不動点定理 (Poincaré の最後の定理) を適用すればよい. したがって, 無限の周期軌道の存在の証明がなされる. それによって述べられている余裕は多い.