

ト-ラス上の力学系について

東大. 理. 石井 一平.

§ 1.

2次元ト-ラス $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の flow で、 T^2 全体を *minimal set* にするものを考える。即ち、以下で考える flow P_t は次の性質をもつものとする。

1) 任意の $P \in T^2$ に対し、 $\overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} P_t(P)} = T^2$

さらに、次の仮定を設ける。

2) P_t は、transversal section (あるいは単に section) を持つ。

ここで、 P_t の transversal section とは、次の性質をもつ、simple closed curve C のことである。

i) 任意の $P \in T^2$ に対し、 $\min\{t > 0 \mid P_t(P) \in C\}$ が存在する。

ii) C の近傍 U と、正数 δ が存在し、次を満たす。

任意の $P \in U$ に対し、 $(\bigcup_{-\delta < t < \delta} P_t(P)) \cap C$ は唯一点からなる。

(P_t が non-singular C^1 -flow ならば、section が存在すること

が知られている。(Siegel)

次に flow の同型を定義する。

Def. 二つの flow ρ_t^1 と ρ_t^2 が同型であるとは、 T^2 の homeo. h と、正数 c が存在して、 $\rho_t^1 = h \circ \rho_{ct}^2 \circ h^{-1}$ が成り立つことである。

(この定義は、もちろん phase space が一般でもよいが、ここでは必要ないので、phase space は T^2 とした。)

性質 1), 2) を持つ flow のうち標準的な flow は、

$$\alpha_t(x, y) = (x+t, y+at) \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

で与えられるものである。

(但し、 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ で、 $(x+2\pi m, y+2\pi n)$; $m, n \in \mathbb{Z}$ なるものは、すべて identify する。なわ、以下では、“ ρ_t ” は 1), 2) を満たす一般の flow を表わすのに使い、“ α_t ” は上記の特別な flow を表わすのに用いるものとする。)

そこで、我々の目的は、次のように述べることができる。

A. 性質 1), 2) を持つ flow が、ある $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ に対し、 α_t と同型になる条件を求めよ。

B. $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ を与えて、 α_t と同型な flow を決定する。

§ 2.

P_t を T^2 上の flow で 1), 2) を満たすとする。そして, C を P_t の section とする。 C の homeo. Γ を

$$\Gamma(P) = P_{T(P)}(P) \quad ; \quad P \in C, \quad T(P) = \min\{t > 0 \mid P_t(P) \in C\}$$

で定義する。

一系, $S = \{e^{2\pi i t} \mid t \in \mathbb{R}\}$ とし, S の変換 R_θ を

$$R_\theta(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i (t + \theta)} \quad ; \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ (const.)}$$

で定義する。

その時, 次の定理は, よく知られている。

Theorem. P_t が, 1), 2) を満たすならば, S から C への homeo. h と, $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ が存在して, 次の diagram を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{R_\theta} & S \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{\Gamma} & C \end{array}$$

この θ は, (flow P_t の section C に関する) rotation number と呼ばれる。(rotation number は整数差を除いて一意的。)

上の定理の " h " を用いて, $H; \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ を次のように定義する。

$$H(x, y) = \rho_{T(x, y)}(h(e^{2\pi i(y - \delta x)}))$$

但し.

$$\tau(x, y) = \{x\} T(h(e^{2\pi i(y - \delta \{x\})}) + \sum_{\substack{0 \leq k \leq x-1 \\ \text{or } x \leq k \leq 0}} T(h(e^{2\pi i(y - \delta(x-k))}))$$

$$(\{x\} \equiv x \pmod{1} \quad \& \quad 0 \leq \{x\} < 1)$$

この H が連続であることは明らか。又、 $H(x+1, y) = H(x, y+1) = H(x, y)$ を示すことも容易に確かめることができる。さらに、 $\{(x, y) \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$ と T^2 とが一対一に対応していることもすぐわかる。よって、 H は T^2 の座標変換を定義している。しかも、 H によって ρ_t は

$$H^{-1} \circ \rho_t \circ H(x, y) = (x + \varphi(t; x, y), y + \delta \varphi(t; x, y))$$

という形の flow に変換される。(ただし、 $\varphi(t; x, y)$ は各 (x, y) について t の単調増加関数。)

従って、1), 2). を示す T^2 上の flow はすべて、上のような形の flow に同型である。

§.3.

ρ_t は T^2 上の flow で、各 (x, y) について、 t の単調増加関数 $\varphi(t; x, y)$ を用いて

$$\rho_t(x, y) = (x + \varphi(t; x, y), y + \delta \varphi(t; x, y)); \quad \delta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

と表わされているとする。(この P_t が, 1), 2), を満たすことは, 明らかである.)

そのとき, 次の命題が成り立つ.

Prop. P_t が almost periodic flow (a. p. flow) であるならば,

P_t は α_t に同型である. T_0 に対し, $\alpha = \delta$.

証明) P_t が T^2 上の a. p. flow ならば, $\exp(2\pi i \varphi(t; x, y))$ は,

a. p. function. 従って, a. p. function の一般論により,

$$\varphi(t; x, y) = \lambda(x, y)t + \psi(t; x, y) \quad ; \quad \psi(t; x, y) \text{ は a. p. function}$$

と表わすことができる.

$\lambda(x, y)$ は, 実は, (x, y) によらない定数である.

実際, P_t は a. p. flow 故, 任意の (x_0, y_0) と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して,

$$d((x_0, y_0), (x, y)) < \delta \quad \text{ならば}$$

$$d(\varphi(t; x_0, y_0), \varphi(t; x, y)) < \varepsilon \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

が成り立つ。(d は Euclid metric)

従って, $d((x_0, y_0), (x, y)) < \delta$ ならば,

$$d(\lambda(x_0, y_0)t + \psi(t; x_0, y_0), \lambda(x, y)t + \psi(t; x, y)) < \varepsilon$$

がすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ。ところが $\psi(t; x, y)$ は

a. p. function. 故, 有界。 $\rightarrow \lambda(x_0, y_0) \neq \lambda(x, y)$ ならば,

$$d(\lambda(x_0, y_0)t, \lambda(x, y)t) \rightarrow \infty \quad (\text{as } t \rightarrow \infty).$$

即ち, $\lambda(x_0, y_0) \neq \lambda(x, y)$ であるとするとき, $d(\varphi(t; x_0, y_0), \varphi(t; x, y)) \rightarrow \infty$

($\omega t \rightarrow \infty$) とする。 P_t が a.p. flow であることに矛盾する。
 従って、 $d((x_0, y_0), (x, y)) < \delta$ ならば $\lambda(x_0, y_0) = \lambda(x, y)$ となりな
 ばならない。 (x_0, y_0) は任意で、 δ は一様。 故に、 $\lambda(x, y) = \text{const.}$

この定数を λ とおく。 さらに、 $\lambda \neq 0$ であることが、 $\varphi(t; x, y)$
 が単調増加函数であることからわかる。

そこで T^2 の座標変換を次のように定義する。

$$\begin{cases} x' = x + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t; x, y) dt \\ y' = y + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \gamma \psi(t; x, y) dt \end{cases}$$

この変換が T^2 の座標変換として、 well-defined であること
 は、 T. Saito [2] の証明を全く、同様である。(こゝでは省略)

この座標変換を h と置く。

$$h \circ P_t \circ h^{-1}(x', y') = (x' + \lambda t, y' + \lambda t)$$

$$\textcircled{1} \quad h^{-1}(x', y') = (x, y), \quad h \circ P_t \circ h^{-1}(x', y') = x'(t; x, y)$$

と置く。

$$\begin{aligned} x'(t; x, y) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x + \varphi(t+s; x, y) - \lambda s) ds \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{T+t} (x + \varphi(\tau; x, y) - \lambda \tau + \lambda t) d\tau \\ &= \lambda t + \left(x + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{T+t} \psi(\tau; x, y) d\tau \right) \\ &= x' + \lambda t \end{aligned}$$

同様に、

$$y'(t; \alpha, y) = y' + \lambda y t$$

以上のことから、 $C = \frac{1}{\lambda}$, $\alpha = \lambda$, そして h を上に構成した
ものにとれば、

$$h \circ \rho_{ct} \circ h^{-1} = \alpha_t$$

が成り立つ。

証明終り \square

この命題と、§.2. で述べたことから、次の定理が導かれる。

Theorem. 1), 2) を満たす T^2 上の flow ρ_t が、ある $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ に
対応する α_t に同型であるための必要十分条件は ρ_t が a.p. flow
であることである。

証明) 十分性は、上の命題と §.2. の結果であり、必要性は、
 ρ_t が a.p. flow であることと、 ρ_t が Liapunov stable である
ことが同値であることに注意すれば、簡単に証明することか
できる。 (略) \square

§.4.

この §.4. では、 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ を与えて、 α_t に同型な flow を決定す
ることを考える。

flow ρ_t は 1), 2) を満たしているとし、 C を ρ_t の section と
あるとする。

Def. $T(P) = \min \{t > 0 \mid P_t(P) \in C\}$ が $P \in C$ に与らぬ定数 τ があるとき、 C を constant section と呼ぶ。

このとき、次の Lemma が成り立つ。

Lemma 1. α_t の $(0,0)$ を通る constant section は

$$C_{m,n} = \{(mt, nt) \mid 0 \leq t < 1, (m,n) = 1, m,n \in \mathbb{Z}\}$$

で、すべて尽くさぬ。

証明) C が α_t の constant section τ $(0,0) \in C$ とする。

C が constant section τ があるから、 $T(P) = a(\text{const}) (P \in C)$ 。

従って、 $(0,0) \in C$ ならば、 $(na, \alpha na) \in C$; $n \in \mathbb{Z}$ 。

集合 $\{(na, \alpha na) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を含む T^2 上の curve が存在する

のは、 $a, \alpha a$ が

$$ka + l\alpha a \in \mathbb{Z} \text{ ならば } k = l = 0 \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

という関係を満足する場合のみであり、それらの curve は

$C_{m,n}$ の一つだけである。($\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ であることは注意) 証明終り。)

Lemma 2. P_t は、1), 2) を満たし、 $P'_t = h \cdot P_{ct} \cdot h^{-1}$ ($c > 0$, h は homeo.) とする。

このとき、 C が P_t の constant section ならば、 $h(C)$ は P'_t の constant section τ がある。

証明) 明らか。

Lemma.3. $P_t \in 1, 2$ を升 T_2 の flow, $C \in P_t$ の section とする。
 $\exists \lambda \in \mathbb{Z}, P'_t = h \circ P_{t+\lambda} \circ h^{-1}$ ($\lambda > 0, h$ は homeo.) とする。
 λ のとき, P_t の C に関する rotation number と P'_t の $h(C)$ に関する rotation number とは、等しい。

証明) 明らか。

Lemma.4. T^2 の座標変換, $h(x, y) = (x', y')$ が λ を升 T_2 として
 λ とする。

i). $h(0, 0) = (0, 0)$

ii) $h \circ \alpha_t \circ h^{-1}(x', y') = (x' + t, y' + \alpha t)$ ($\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$)

そのとき, h は恒等写像。即ち, $h(x, y) = (x, y)$ である。

証明) Lemma.1, 2 によって, $h(C_{0,1})$ は $C_{m,n}$ の一つしか
 h が成り立たない。とすると, $(m, n) \neq (m', n')$ ならば,
 α_t の $C_{m,n}$ に関する rotation number と $C_{m',n'}$ に関する rotation
 $number$ とは相異なる。従って, Lemma.3. によって $h(C_{0,1}) = C_{0,1}$
 h である。

仮定 ii) と $h(C_{0,1}) = C_{0,1}$ によつて,
 $h(0, 0) = (0, 0)$ 故に, $h(0, \alpha) = (0, \alpha), \dots, h(0, n\alpha) = (0, n\alpha), \dots$
 $(n \in \mathbb{Z})$ 。 h は T^2 の座標変換故に, $h(0, \delta + m) = h(0, \delta)$ ($\delta \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$)
 h かつ, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 。従つて, 任意の y に対し, $h(0, y) = (0, y)$
 h が成り立つ。

よつて, $(x, y) = \alpha_x(0, y - \alpha x)$ であるから, $\forall (x, y)$
 h に対し, $h(x, y) = (x, y)$ が成り立つ。 証明終り。 \square

Lemma. 5. $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, h は T^2 の座標変換, c は正の定数

で次をみたすとする。

$$i) \quad \alpha'_t = h \circ \alpha_{ct} \circ h^{-1}$$

$$ii) \quad h(0,0) = (0,0)$$

このとき h は線型変換で、且つ、 $\alpha' = \frac{k+l\alpha}{m+n\alpha}$

但し、 k, l, m, n は $h(x,y) = (kx+ly, mx+ny)$ の整数。

$$(\det \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \pm 1)$$

証明) Lemma. 1, 2 と α Lemma. 4. を用いる。

次の定理は Lemma. 5 と §. 3. の定理から得られる。

Theorem. $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ は与えられているとする。

このとき P_t が α_t に同型であるための必要十分条件は、 P_t が次の二つの条件を満足することはである。

i) P_t は 1), 2) をみたす, a.p. flow である。

ii) P_t のある section に対する rotation number を σ とすると、

$$\sigma = \frac{k+l\alpha}{m+n\alpha} \quad ; \quad k, l, m, n \in \mathbb{Z} \quad \det \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \pm 1$$

と書ける。

§. 5.

次に、 P_t が C^r -vector field ($1 \leq r \leq \infty$) で生成され、かつ smooth な invariant measure を持つ場合を考える。

つまり、 P_t は vector field $X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y}$ で生成されている。
 X_1, X_2 がある正値函数 M に対し

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial y} \equiv 0$$

をみたしていることを仮定する。(X と M は一回連続微分可能とする。)

この場合、至る所 $X \neq 0$ で $\int_{T^2} MX_1 dx dy / \int_{T^2} MX_2 dx dy$ が無理数ならば、 P_t は 1), 2) をみたすことが知られている。 [1]

P_t の section C に関する rotation number σ は

$$\sigma = \frac{k + l\sigma_0}{m + n\sigma_0} \quad ; \quad \sigma_0 = \int_{T^2} MX_1 dx dy / \int_{T^2} MX_2 dx dy$$

$$k, l, m, n \in \mathbb{Z}, \quad \det \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \pm 1$$

と表わされることは容易にわかる。(k, l, m, n は C のとり方に依存する。くわしく言えば、 C の homotopy class によつて決まる。)

従つて定理は次の様に書ける。

Theorem. $\frac{\partial(MX_1)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial y} \equiv 0$ ($M \in C^1, M > 0$) を満足する

C^1 -vector field $X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y}$ で生成される flow が与えられた X_t ($t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) と同型であるための必要十分条件は、 X が次をみたすことである。

i). 至る所 $X \neq 0$

$$ii) \quad \int_{T^2} \mu X_1 dx dy / \int_{T^2} \mu X_2 dx dy = \frac{k+l\alpha}{m+n\alpha}$$

$$; k, l, m, n \in \mathbb{Z}, \det \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \pm 1$$

iii) X で生成される flow は a.p. flow

最後に、vector field によって生成される flow が a.p. であるための十分条件を与える。

Theorem. vector field X が次の条件を満たせば、 X によって生成される flow は a.p. flow である。

$$i) \quad X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{は} \quad \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} \equiv 0 \quad \text{を満たす。}$$

ii) $\sigma = \int_{T^2} X_1 dx dy / \int_{T^2} X_2 dx dy$ に対し、正の定数 K, ν が存在し、任意の整数 p と任意の自然数 q に対し、

$$|\sigma - \frac{p}{q}| \geq K q^{-\nu}$$

を満たす。

iii) X は C^μ -vector field である。 $T_2 T_1 L, \mu \geq \nu$ 。

証明は省略する。

S. Sternberg [3] によれば、上の定理と同じ条件で、 X によって生成される flow は、 α_t に同型であり、 $(\alpha = \sigma)$ 、且つ、同型写像 h は、~~μ-1~~ 連続微分可能にとれるとしていえるが、その証明には疑問があると思われる。

— 参考文献 —

- [1] Saito, T., On the measure-preserving flow on the torus,
Journ. Math. Soc. Jap. 3, No. 2 (1951) 279-284
- [2] ———, On dynamical systems in n -dimensional torus
Funk. Ekvac. 7, (1965) 91-102
- [3] Sternberg, S., Celestial Mechanics Part II.
Benjamin (1969)