数理解析研究所講究録
176巻 1973年 1-8

標準形直接制御系の絶対安定性について

九大 理　　斉藤 登

§1. 序

Lurie の標準形直接制御系

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} \dot{x}_i = -\rho_i x_i + f(\sigma) & (i=1,2,\cdots,n) \\ \sigma = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \end{cases}$$

の絶対安定問題について考察した結果を報告する。

われわれが考える絶対安定問題とは、$\rho_1,\cdots,\rho_s$ は正の実数で $\rho_{s+1},\cdots,\rho_n$ は二つずつ複素共役で正の実部を持ち、$c_1,\cdots,c_s$ は実数で $c_{s+1},\cdots,c_n$ は二つずつ複素共役でかつ $\gamma=-\sum_{i=1}^{n} c_i$ は正数、特性関数 $f(\sigma)$ はすべての実数に対して定義されており $\sigma f(\sigma)>0$ $(\sigma\neq 0)$, $f(0)=0$ なる実数値関数で系(1)の解が初期値に関して一意的に決まる程度の滑らかさを持つという仮定のもとに、任意の特性関数に対して $x_1,\cdots,x_s$ が実数で $x_{s+1},\cdots,x_n$ が二つずつ複素共役となっている解の族に関する

系(1)の零解の大域的漸近安定性を求める問題である。

§2. Lurieの方法

系(1)の後の式を微分すると、間接制御系

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_i &= -\rho_i x_i + f(\sigma) \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ \dot{\sigma} &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i - \gamma f(\sigma) \end{aligned}$$

が得られる。ただし

$$\text{(3)} \qquad \beta_i = -\rho_i c_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

われわれの絶対安定問題に対するLurie の方法[2] (Halanay [1] 参照)は、系(2)の零解の絶対安定性から系(1)の零解の絶対安定性が得られることを利用して、(2)に対する適当なLyapunov 関数を構成することである。

ところが、(3)なる関係があるとき、系(2)の解を $x_i = x_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sigma = \sigma(t)$ とすると、$\dot{\sigma} - \sum_{i=1}^{n} c_i \dot{x}_i = 0$ すなわち

$$\sigma - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = C \qquad (C:\text{任意定数})$$

が成り立つ。これから系(2)は系(1)から導かれたものである限り決して絶対安定とはなり得ず、Lurieの方法は無意味である。

§3. 絶対安定のための十分条件

間接制御系を用いずに、直接に系(1)に対する絶対安定のための条件を求める。関数Vを Lurie に従って

$$V=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{p_i+p_j}x_i x_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}A_i x_i^2+C_1 x_{s+1}x_{s+2}+C_3 x_{s+3}x_{s+4}$$

$$+\cdots+C_{n-s-1}x_{n-1}x_n+R\int_0^{c'x}f(\tau)d\tau$$

$$\left(c'x=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i\right)$$

とおく。ただし $a_i\,(i=1,\cdots,s)$ は実数で $a_{s+\alpha}\,(\alpha=1,\cdots,n-s)$ は二つずつ複素共役、$A_i\,(i=1,\cdots,s)$ および $C_\alpha\,(\alpha=1,3,\cdots,n-s-1)$ は非負数、R は非負数である。

全微分$\dot V$を計算すると

$$\dot V=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{p_i+p_j}\left\{x_j\left(-p_i x_i+f(c'x)\right)+x_i\left(-p_j x_j+f(c'x)\right)\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{s}A_i x_i\left(-p_i x_i+f(c'x)\right)+C_1\left(-p_{s+2}x_{s+2}+f(c'x)\right)x_{s+1}$$

$$+\cdots+Rf(c'x)\left\{-\sum_{i=1}^{n}p_i c_i x_i-\gamma f(c'x)\right\}$$

$$=-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\right)^2-\sum_{i=1}^{s}p_i A_i x_i^2-C_1\left(p_{s+1}+p_{s+2}\right)x_{s+1}x_{s+2}-\cdots$$

$$-\gamma R\left(f(c'x)\right)^2-k\left(\sum_{i=1}^{n}c_i x_i\right)f(c'x)$$

$$+f(c'x)\sum_{i=1}^{s}\left\{A_i+(k-R\rho_i)c_i+2a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\rho_i+\rho_j}\right\}x_i$$

$$+f(c'x)\sum_{\alpha=1}^{n-s}\left\{C_\alpha+(k-R\rho_{s+\alpha})c_{s+\alpha}+2a_{s+\alpha}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\rho_{s+\alpha}+\rho_j}\right\}x_{s+\alpha}$$

となる。ただし $C_2=C_1,\ C_4=C_3,\ \cdots,\ C_{n-s}=C_{n-s-1},\ k\geq 0$.

もしも $A_i\ (i=1,\cdots,s)$, $C_\alpha\ (\alpha=1,\cdots,n-s)$, R, k を

$$A_i+(k-R\rho_i)c_i+2a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\rho_i+\rho_j}=0\quad(i=1,\cdots,s)$$

(4)

$$C_\alpha+(k-R\rho_{s+\alpha})c_{s+\alpha}+2a_{s+\alpha}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\rho_{s+\alpha}+\rho_j}=0\quad(\alpha=1,\cdots,n-s)$$

となるように選ぶことができれば $\dot{V}$ は負半定値となる。

更に、$A_i\neq 0\ (i=1,\cdots,s)$, $C_\alpha\neq 0\ (\alpha=1,\cdots,n-s)$ ならば、V は正定値かつ $\dot{V}$ は負定値となるから、大域的漸近安定性に関する定理（[1] 参照）を用いて次の定理を得る。

［定理 1］　実数 $a_i\ (i=1,\cdots,s)$ と二つずつ複素共役な数 $a_{s+\alpha}$ $(\alpha=1,\cdots,n-s)$、正の数 $A_i\ (i=1,\cdots,s)$ と $C_\alpha\ (\alpha=1,\cdots,n-s)$ および非負数 R と k を方程式(4)を満たすように選ぶことができれば、系(1)の零解は絶対安定である。

ところが

$$A_{i_1},\ A_{i_2}, \cdots, A_{i_p} = 0 \quad (i_p \leq s)$$

$$C_{\alpha_1},\ C_{\alpha_2}, \cdots, C_{\alpha_q} = 0 \quad (\alpha_q \leq n-s)$$

となる場合には、Vが正定値となっても$\dot{V}$が負定値となるとは限らないので、一般的な定理からは安定性のみしか結論できない。しかしながらこの場合も次の定理が成り立つ。

[定理2]　$\rho_\lambda = \rho_\nu$ 又は $\rho_{s+\lambda'} = \rho_{s+\nu'}$ ならば $A_\lambda, A_\nu > 0$ 又は $C_{\lambda'}, C_{\nu'} > 0$ という仮定のもとに、定理1における A_i, C_α のうちで $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_p} = 0$ $(i_p \leq s)$　$C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \cdots, C_{\alpha_q} = 0$ $(\alpha_q \leq n-s)$ となるものがあっても、$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_p} \neq 0$　$a_{s+\alpha_1}, a_{s+\alpha_2}, \cdots, a_{s+\alpha_q} \neq 0$ ならば、系(1)の零解は絶対安定である。

[証明]　まず安定性はすでに得られていることに注意する。条件から解 $x_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ に対して $V(x(t)) = V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ はtの非増加関数である。よって $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = V_0$ となる非負数V_0が存在する。$V_0 = 0$ となることを証明すればよい。そこで$V_0 > 0$と仮定する。このとき次の二つの場合が考えられる。

(i) すべての $t \geq T$ に対して $V(x(t)) = V_0$ となる十分大きなTが存在する

(ii) 任意のtに対して $V(x(t)) > V_0$

(i)の場合、仮定からすべての $t \geq T$ に対して $\dot{V}(x(t)) = 0$.

$\dot{V}(x) = 0$ となるベクトル $x = (x_1, \cdots, x_n)$ は

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$$

$$x_i = 0 \qquad (i \neq i_1, \cdots, i_p, s+\alpha_1, \cdots, s+\alpha_q)$$

を満たす。定数変化法の公式により

$$x_i(t) = e^{-p_i(t-T)} x_i(T) + \int_T^t e^{-p_i(t-s)} f\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(s)\Big) ds \qquad (i=1, \cdots, n)$$

が成り立つから、すべての $t \geqq T$ に対して

$$x_i(t) = e^{-p_i(t-T)} x_i(T) \qquad (i=1, \cdots, n) .$$

これから $t \to \infty$ のとき $x_i(t) \to 0$ $(i=1, \cdots, n)$ となるから $V_0 > 0$ という仮定に反する。

次に(ii)の場合も同じく矛盾を生ずることを示す。以下すべてベクトル記号を用い、(t_0, x_0) を通る(1)の解を $x(t; t_0, x_0)$ で表わすことにする。解 $x(t; t_0, x_0)$ $(t \geqq t_0)$ は有界だから、

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots \to \infty$$

$$\xi = \lim_{k \to \infty} x(t_k; t_0, x_0)$$

となる ξ と $\{t_k\}_{k=1,2,3,\cdots}$ が存在する。$x_k = x(t_k; t_0, x_0)$ $(k=1,2,3,\cdots)$ とおくと、V の連続性から

$$\lim_{k \to \infty} V(x_k) = V(\xi) = V_0 .$$

さて、解 $x(t;t_0,\xi)$ を考える。(i)の証明から

$$0 \leqq V(x(T;t_0,\xi)) < V_0 - \varepsilon_0$$

となる $\varepsilon_0 > 0$ と $T > t_0$ が存在する。よって同じく V の連続性から $\|x-y\| < \varepsilon_1$ ならば $|V(x) - V(y)| < \varepsilon_0$ となる $\varepsilon_1 > 0$ が存在する。一方、$f(t)$ の仮定から初期値に対する解の連続性が成り立つので、

$$\|x(T;t_0,x_{k_0}) - x(T;t_0,\xi)\| < \varepsilon_1$$

となる k_0 が存在する。よって

$$V(x(T;t_0,x_{k_0})) < V_0$$

が成り立つ。系(1)は自励系であるから解の一意性によりすべての t に対して

$$x(t;t_0,x_{k_0}) = x(t+t_{k_0}-t_0;t_0,x_0)$$

が成り立っている。故に

$$V(x(T+t_{k_0}-t_0;t_0,x_0)) < V_0$$

が得られる。これは(ii)の仮定に反する。

(i)、(ii)のいずれも矛盾であるから $V_0 = 0$ を得る。

証明終り

引用文献

[1] A. Halanay, Differential Equations; Stability, Oscillations, Time Lags, Academic Press, 1966

[2] A. I. Lurie, On Some Nonlinear Problems in the Theory of Automatic Control, H. M. Stationery Office, London, 1951 (Russian, English transl.).