数理解析研究所講究録
177巻 1973年 112-124



# C*-代数のmultiplierとderivationについて

山形大 理　富山淳

## §1 Multiplierについて.

von Neumann代数の時と違ってC*-代数は単位元をもたない時が普通である。このことから与えられたC*-代数Aを含む単位元をもつC*-代数Bを、どのようにとれば議論が自然に行なえるかということが問題になる。例えば $A = C_0(X)$ (Xはlocally compact space, $C_0$はその上の∞で0になる連続関数。以下この記号を使う。又有界連続関数環の時は $C^b$ とかく)の時はBとしてはAに単位元を添加した環よりは $C^b(X)$ をとる方が自然な時が多いであろう。これを非可換に広めて考えられたのがC*-代数のmultiplierである。ここではmultiplier及びそれとderivationとの関係について最近のC. Akemann − G. Elliott − G.K. Pedersen及び筆者による研究の一部を紹介する。前者については詳細はC. Akemann, G.K. Pedersen, 富山; Multipliers of C*-algebras (コペン

ハーゲン大よりの preprint）．後手は前記4名による preprint が近日中に出る筈である．

$C^*$－代数 $A$ の second dual を $A''$ とかく．$A$ の multiplier を

$$M(A) = \{x \in A'';\ xa,\ ax \in A \text{ for any } a \in A\}$$

と定義する．$M(A)$ は定義より $A''$ の $C^*$－部分代数であり，$A$ を ideal として含み単位元をもつ．これは通常の写像の組による定義と一致するが，更に次のことが検証出来る．

Proposition 1. $\pi$ を $A$ の non-degenerate な faithful 表現とすると，$\pi$ は $M(A)$ より $\widetilde{\pi(A)}$ 内での idealizer への同型対応に一意に拡大出来る．

即ち $M(A)$ の定義としては，$A''$ と限らずどこの弱閉包の中で idealizer をとっても本質的に変りはない．$M(A)$ の大きさについては次の結果が成立つ．

定理 2. 次のどの條件からも，$A$ は dual ring になる．

(i) $M(A) = A''$

(ii) $A$ が separable で $M(A)$ が von Neumann 代数．

一般には $M(A)$ が von Neumann 代数になる例は沢山ある．次に $A$ に対する $M(A)$ の大きさとしては，一般には $M(A)/A$ が 1 次元になる場合もあるが（[5] 参照），

定理 3. $A$ が separable で単位元をもたないならば $C^*$－

代数 $M(A)/A$ は separable な空間上へは表現出来ない。

$M(A)$ の strict topology とは普通, semi-norm

$$\|x\|_a = \|xa\| + \|ax\| \quad a \in A$$

で生成された位相を言い, このとき $M(A)_\beta$ とかく。$A$ が単位元をもつとき, これは norm 位相と一致する。又 $M(C(H)) = B(H)$ ($C(H)$ はヒルベルト空間 $H$ での compact 作用素の代数, $B(H)$ は有界線型作用素全体のつくる代数) であるが $B(H)_\beta$ は strong *-位相による $B(H)$ のことである。$X$ を locally compact とし, $C^*$-代数 $A(t)$ をつけた fibred space $\{X, A(t)\}$ を考える。

$\mathfrak{F}$ をその上での cross-section の集りとし更に次の条件をみたすものとする。

(i) 各点での作用で $\mathfrak{F}$ は *-代数をなす。

(ii) $\mathfrak{F}(t) = \{a(t) \mid a \in \mathfrak{F}\}$ は各点 $t$ において $A(t)$ で dense,

(iii) 各 $a \in \mathfrak{F}$ について関数 $t \longrightarrow \|a(t)\|$ は $C_0(X)$ に入る。

今 cross-section $x$ が $t_0$ で連続であるということを,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, U(t_0),\ a \in \mathfrak{F}\ ;\ \|x(t) - a(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in U,$$

と定義すると, $\{X, A(t), \mathfrak{F}\}$ による $\infty$ で $0$ になる連続な cross section 全体 $C_0(X, A(t), \mathfrak{F})$ は $C^*$-代数をなす。次に有界な cross section $x$ が strictly continuous ということを,

$$\forall \varepsilon > 0,\ a \in \mathfrak{F} \quad \exists\, U(t_0),\ b \in \mathfrak{F}\ ;$$

$$\|(x(t)-b(t))a(t)\|+\|a(t)(x(t)-b(t))\|<\varepsilon \quad \forall t\in U(t_0)$$

と定義する．但しfibreとしては$M(A(t))_\beta$をとる。X上で連続なもの全体を$C^b(X, M(A(t))_\beta, \mathfrak{F})$とおくと、この集合もM(A)も共にfibred space $\{X, A(t)''\}$上の有界なcross-sectionの集りと考えることが出来るから、両者の包含関係も考えられるわけであるが結果は

定理 4. $C^b(X, M(A(t))_\beta, \mathfrak{F}) = M(C_0(X, A(t), \mathfrak{F}))$.

従ってその系として、ねじれがぜんぜんない場合には

系 1. $M(C_0(X, A)) = C^b(X, M(A)_\beta)$.

例えば $M(C_0(X, C(H))) = C^b(X, B(H)_{s^*})$ である。

系 2. Aがn-homogeneous $C^*$-代数の時、M(A)はAのstructure bundle（[4]参照）の有界連続なcross sectionの全体である。

一般に各fibreが単位元をもっても、strict continuityは通常の連続性と一致せず一致するのはcross section $t\to 1_t$ (A(t)の単位元)が連続になるような時である。

その他multiplierのliftingの問題，テンソル積のmultiplierなど論じうるべき問題は沢山あるがここでは略すことにする。

§2. Derivation との関係.

C*-代数Aのderivation $\delta$は常にAの弱位相による閉包を拡大出来るからその一つとしてA''を拡大出来る。そしてvon Neumann代数でのderivationはinnerになるから、ある $h_\delta \in A''$ が存在して

$$\delta(a) = h_\delta a - a h_\delta \qquad a \in A$$

となる。この時は単に $\delta(a) \in A$ が保証されるのみだが、$h_\delta$ がAのmultiplierの時は、$h_\delta a$, $a h_\delta$ が共にAに属しているわけである。そこで次の様な質問を考えてみる。

Q.1. Aのderivationがすべてmultiplierで与えられるようなときはいつか？

Q.2. 1つのderivationがmultiplierで与えられるのはどんな時か？

Q.3. A, $\delta$が与えられたとき、Aのnon-zero ideal Iが存在して $\delta|I$ がmultiplierで与えられるように出来ないか？

Q.3.が要求としては一番ささやかなものであるが一般には状況はもっとひどく、次のようになっている。即ち

"AをUHF-代数としたとき、$C([0,1], A)$ の中にはどのような non-zero ideal に制限してもそこでmultiplierでは与えられないderivation $\delta_0$ が存在する。" $\delta_0$のつくり方は少し厄

分であるが用するに [0,1] の~~どんな~~任意の開集合の上で $h_{\delta_0}$ をどんな調整しても連続にならないような $\delta_0$ を探してくるのである。$h_\delta$ の性質がある意でよければ例論上のようなことは起らない。
その目安として簡単な計算より次のことがわかる。

Proposition 5. (i) $h_\delta^2$ が又 A の derivation を与えれば、$h_\delta$ は $\delta(A)$ より生成されたAの ideal の multiplier である。

(ii) $\forall a \in A$, $h_\delta a$ が又 A の derivation をひき起せば、$h_\delta$ は A の commutator ideal の multiplier である。

単位元をもつ単純な $C^*$-代数の derivation がすべて inner であることを証明した境氏は更に[4]において単位元をもたない場合をとり扱い、A に対して次のような $C^*$-代数 D(A) の存在
(derived algebra)
を証明した。

(i) D(A) は A を ideal として含む primitive $C^*$-代数

(ii) A の derivation はすべて D(A) の元によりあたえられる。

(iii) D(A) は上2条件をみたす単位元をもつ $C^*$-代数として一意にきまる。

しかし M(A) の定義とその性質(idealizer)を考えれば上の D(A) が実は M(A) にほかならないことは容易にわかるであろう。

一般に M(A) は A が primitive な時は primitive な $C^*$-代数になる。以上から単純 $C^*$-代数に関する境氏の derivation の

結果は次のようにまとめて言うことが出来る。

"単純 $C^*$-代数は Q1 の1つの答である。"

もともと proper な $C^*$-代数というのは単位元をもたないのが普通とも言えるであろうから、以上から考えても $C^*$-代数の derivation では inner と outer という取り扱い方は発想としては強すぎるように感じられる。最近の Elliott [1] の議論を見ていても、そこで outer として出てきた derivation は殆んど multiplier で与えられるものばかり(従って本質的には outer ではないとも言えるもの)である。

さて Q3 について否にちがった例は NGCR-代数における現象であった。では I 型の $C^*$-代数についてはどうであろうか?

次の結果はこの部分については Q3 が肯定的であること、及び Q1 の解答を大体与えている。

定理 6. $A$ を連続な trace をもつ $C^*$-代数、$\hat{A}$ をその dual とする。もし $\hat{A}$ が paracompact ならば $A$ の derivation はすべて multiplier で与えられる。

証明. $A$ は CCR 代数であるから、$\hat{A}$ は $A$ の primitive ideal の空間と同一視できる。$t \in \hat{A}$ について $A(t) = A/t$ とおく。仮定から $\hat{A}$ の locally finite な open covering $\{G_\gamma\}$ と、$A$ の元の集合 $\{a_\gamma\}$ が存在して $a_\gamma(t)$ は $t \in G_\gamma$ のとき $A(t)$ の minimal projection であるように出来る。$\delta(t)$ を derivation

$\delta$ から $A(t)$ 上にひきおこされた derivation とする。各 $A(t)$ の性質から cross section $x_\gamma(t)$ を $M(A(t))$ の値をとり

$$\delta(a)(t)=\delta(t)(a(t))=x_\gamma(t)a(t)-a(t)x_\gamma(t)\qquad a\in A$$

で且つ $\|x_\gamma(t)\|\leq\|\delta\|$ ととれる。又更に $t\in G_\gamma$ について $a_\gamma(t)x_\gamma(t)a_\gamma(t)=0$ となるようにとっておく。$\{f_\gamma\}$ を $\{G_\gamma\}$ に対する1の分解とする。今 $t_0\in G_\gamma\cap G_\beta$ とすると glim [ ] より $\exists\, U(t_0)$, $v\in A$;

$$v^*(t)v(t)=a_\gamma(t),\quad v(t)v^*(t)=a_\beta(t)\qquad \forall t\in U(t_0).$$

従って

$$\begin{aligned}x_\gamma(t)a_\beta(t)&=\delta(v)(t)v^*(t)+v(t)x_\gamma(t)v^*(t)\\&=\delta(v)(t)v^*(t)\end{aligned}$$

となって cross-section $t\longrightarrow x_\gamma(t)a_\beta(t)$ は $t_0$ で連続になる。$y_\gamma=f_\gamma x_\gamma$, $b_\beta=f_\beta\cdot a_\beta\in A$ とおけば以上から

$$t\longrightarrow y_\gamma(t)b_\beta(t)\in A(t)$$

は ∞で0になる連続な cross section となる。但し連続性をきめる系は $A$ の元による cross section の全体を用いる。 $x=\sum_\gamma y_\beta$ とおけば $x$ は $\{\hat{A}, M(A(t))\}$ での有界な cross-section で且つ $\delta$ をひきおこす。更に

$$I=\{a\in A\ ;\ xa\in A\}$$

とおけば $I$ は閉イデアルで $b_\gamma$ $(\forall\gamma)$ を含むことから $A$ のどの primitive ideal にも含まれない。即ち $I=A$. Q.E.D.

Q 2. については次のことが証明出来る.

定理 7. $\delta$ を $A$ の derivation. 今 $t \in \hat{A} \longrightarrow \|\delta(t)\|$ が連続ならば $\delta$ は multiplier で与えられる.

$A$ が単純環の時は $\|\delta(t)\| = \|\delta\|$ で定数であるから、すべての derivation が上の仮定をみたしていることになる. このように上の結果は $\hat{A}$ が Hausdorff であるかないかを問題にしていない。証明は少し長いので概略をのべる. 先ず

補題 7.1. $\mathfrak{M}$: von Neumann 代数, $\delta$ derivation. 今 $x$ が $\delta$ を与え且つ任意の $\mathfrak{M}$ の central projection $e$ について

$$\|xe\| = \frac{1}{2}\|\delta|\mathfrak{M}e\|$$

とすると $x \in \mathfrak{M}$ となる.

上の様な性質をもつ元が($\delta$ が self-adjoint でなくとも) $\mathfrak{M}$ の中にとれる(一意) ことは最近 Halpern [2] によって証明されたが上のことはそのようなものは $\mathfrak{M}$ の外にはない、ということである. 証明は [ ] による $\mathfrak{M}$ の中の元を $x_0$ とし $x = x_0 + x_1$ ($x_1 \in \mathfrak{M}'$) とおいて $x_1 = 0$ を示す. 今 $x_1 \neq 0$ とすると

$$\exists \text{ projection } f \in \mathfrak{M}' ;\ f x_1^* x_1 f \geq \beta f \quad \beta > 0$$

ととれ, vector を $\xi = f\xi$ とすると

$$\|x\xi\|^2 = \|x_0\xi\|^2 + 2\mathrm{Re}(x_0\xi, x_1\xi) + \|x_1\xi\|^2$$
$$\geq \|x_0\xi\|^2 + 2\mathrm{Re}(x_0\xi, x_1\xi) + \beta$$

となるから、$x_2 = f_2 x_1 f_2$ を partial isometry で近似することにより $\mathfrak{M}'$ の projection $g \leq f$ をとって

$\exists\, \xi = g\xi\ ;\ \|x\xi\|^2 > \|x_0 g\|^2$

と出来るようにするわけである。$g$ の central cover を $e$ とすれば矛盾が出る。$x_2 = 0$ の時はより単純に $e$ を $f$ の central cover にとればよい。

補題 7.2. $A \subset B$, $\rho$ を $\rho(A)$ が non-degenerate になるような $B$ の表現とするとき、$\rho(A)$ の弱閉包 $\widehat{\rho(A)}$ が常に $\widehat{\rho(B)}$ の ideal になっているならば、$A$ 自身が $B$ の ideal である。

定理の証明の鍵になるのは次のことである。先ず atomic な表現を考えることにより $A$ を $\hat{A}$ 上の有界な cross section のつくる代数と考える。fibre は既約表現 $t \in \hat{A}$ による $H_t$ 上の $C^*$－代数 $A(t)$ — $A$ の像 — である。$\{\hat{A}, B(H_t)\}$ での有界な cross section の代数 $\mathfrak{M}$ は von Neumann 代数であるから、$M(A)$ も $\mathfrak{M}$ の中で考えて差支えない。各 $t$ について $x(t) \in B(H_t)$ を、$\delta(t)$ をひきおこし且つ

$$\|x(t)\| = \frac{1}{2}\|\delta(t)\|$$

となるようにとる。$x$ は cross section として $\mathfrak{M}$ の元と考えられ $A$ で $\delta$ をひきおこす。そこで今 $B$ を $A$ と $x$ と $M(A)$ の

center から生成された $C^*$-代数とすると、$\rho$ を $B$ の表現で $\rho(A)$ が non-degenerate なものとすれば常に

$$\|\rho(x)\| = \frac{1}{2}\|\rho\circ\delta\|$$

が成立つ。 - - - - - - - - - - - - - - - - (*)

上のことが成立てれば、補題 7.1 より $\rho(x)\in\widetilde{\rho(A)}$ となり、結局 補題 7.2 より $A$ が $B$ の ideal となって、上の $x$ が $A$ の multiplier になることがわかる。ここで (*) を示すのに仮定の使い方であるが、$\varepsilon>0$ について

$$f(t) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon+\|\rho\circ\delta\|}{\|\delta(t)\|}\right\} \qquad t\in\hat{A}.$$

とおく。(但し $\|\delta(t)\|=0$ の時は第二項が $\infty$ 従って $f(t)=1$ と考える)。$f(t)$ は $\hat{A}$ 上の連続関数であるから、Dauns - Hofmann の定理によって $M(A)$ の center の元と考えられる。そしてつくり方から $\rho(x)=\rho(fx)$ となることがわかり、更に $t\in\hat{A}$ について

$$\|f\cdot x(t)\| = |f(t)|\,\|x(t)\| = \frac{1}{2}|f(t)|\,\|\delta(t)\|$$
$$\leq \frac{1}{2}(\|\rho\circ\delta\|+\varepsilon)$$

より $\varepsilon\to 0$ として $\|\rho(x)\|\leq\frac{1}{2}\|\rho\circ\delta\|$。よって
$\|\rho(x)\| = \frac{1}{2}\|\rho\circ\delta\|$.

## 文献


1. G. A. Elliott; Some $C^*$-algebras with outer derivations, preprint.
2. H. Halpern; The norm of an inner derivation of an $AW^*$-algebra, preprint.
3. R. Kadison, E. C. Lance, J. R. Ringrose, Derivations and automorphisms of operator algebras II, J. Functional Analysis 1, 204-221 (1967)
4. S. Sakai; Derivations of simple $C^*$-algebras. II., Bull. Soc. Math. France 99, 259-263 (1971).
5. S. Sakai; Derivations of simple $C^*$-algebras III, to appear in Tôhoku Math. J.
6. G. K. Pedersen, Applications of weak $*$-semi-continuity in $C^*$-algebra theory, Duke Math. J. 39, 431-450 (1972).
7. J. G. Stampfli; The norm of a derivation, Pacific J. Math., $3\overset{3}{4}$, 737-747 (1970)
8. J. Tomiyama; Topological representation of $C^*$-algebras, Tôhoku Math. J., 14, 187-204 (1962)
9. J. Tomiyama & M. Takesaki; Applications of fibre bundles to the certain class of $C^*$-alg-

ebras, Tôhoku Math. J. 13, 498–523 (1961).